Разработка модульной программы обучения теме «Тригонометрические функции»

Учебник:

А. Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа 10–11 кл. Издательство “Мнемозина”.

Пояснительная записка

Модульная программа “Тригонометрические функции” включает в себя один блок из 12 модулей, рассчитанных на 23 часа.

Предлагается провести:

- 12 лекций (по одной в каждом модуле);
- урок по карте с указанием заданий для учащихся;
- нестандартный урок “умники и умницы”;
- 12 самостоятельных работ;
- две контрольные работы;
- на каждом уроке решения задач учащиеся разбиваются на группы по 4 человека;
- на последнем уроке учащиеся защищают свои проекты.

Модульная программа «Тригонометрические функции» 23 часа.

М1 – Числовая окружность – 4 ч.

М2 – Синус и косинус. Тангенс и котангенс – 3 ч.

М3 – Тригонометрические функции числового аргумента – 1 ч.

М4 - Тригонометрические функции углового аргумента – 1 ч.

М5 – Формулы приведения – 2 ч.

М6 - Функция y = sin x, ее свойства и график – 2 ч.

М7 - Функция y = cos x, ее свойства и график – 2 ч.

М8 - Периодичность функций y = sin x, y = cos x – 1ч.

M9 - Как построить график функции $y = mf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$ – 1 ч.

M10 - Как построить график функции $y = f(kx)$, если известен график функции $y = f(x)$ – 1 ч.

M11 - График гармонического колебания. – 1ч.

M12 - Функции $y = tg(x)$, $y = ctg(x)$ их свойства и графики – 2ч.

Урок 22 – Контрольная работа.

Урок 23 – Защита проектов учащихся, интеллектуальная игра «Умники и умницы».

При разработке модульной программы использована следующая учебно-методическая литература:

1. А. Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа:

   А) Учебник 10 - 11 кл.;

   Б) Задачник 10 – 11 кл.;

   В) Методическое пособие для учителя 10 - 11 кл.;

   Г) А.А. Александрова. Алгебра и начала анализа. Самостоятельные работы 10 кл.
2. Примерная программа среднего (полного) общего образования по математике (базовый уровень).
3. Г. И. Глейзер “История математики в школе”. “Просвещение”, 1992г.
4. Третьяков П.И., Сенновский И. Б. Технология модульного обучения в школе. Москва, 1997г.
5. Зверева Н.М. Практическая дидактика для учителя “Педагогическое общество России”, Москва, 2001г.

Комплексная дидактическая цель

В результате овладения содержанием всех модулей учащиеся должны **знать**:

- понятия числовой окружности, косинуса синуса тангенса котангенса числового аргумента;
- формулы приведения, основные тригонометрические формулы;
- соотношения между градусной и радианной мерами угла;
- свойства тригонометрических функций.

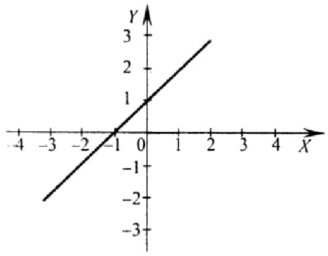
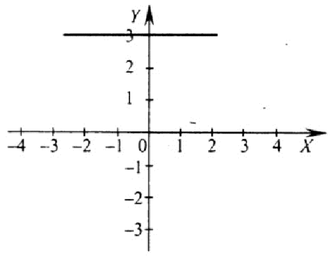
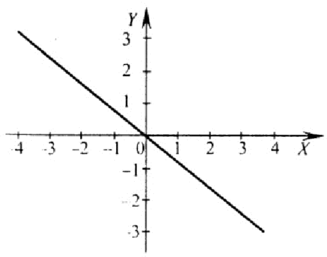
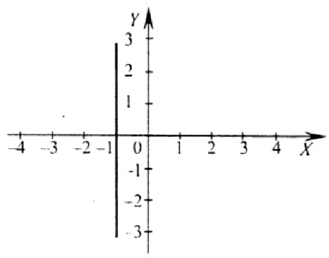
Уметь:

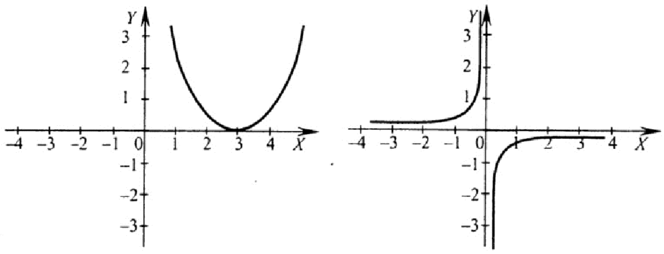
- переводить из градусной меры в радианную и обратно;
- находить значения тригонометрических функций по заданному аргументу;
- применять формулы приведения;
- преобразовывать тригонометрические выражения, используя основные тригонометрические тождества;
- решать графически тригонометрические уравнения и неравенства;
- находить наименьшее и наибольшее значение функций на отрезке;
- исследовать функцию на четность;
- находить период функции;
- преобразовывать графики функций;
- строить кусочные функции;
- читать графики функций.

Модуль 1
Числовая окружность – 4 часа

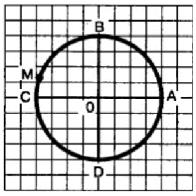
ПМ

Урок 1		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний. Повторить алгебраические функции, изучаемые в курсе алгебры 7-9 классов, единицы измерения угловых величин, формулу для нахождения длины окружности, геометрический смысл числа π и его значение, рассмотреть понятие «числовая окружность», длина окружности ее дуги, закрепить изученное в ходе решения примеров.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. Учитель начинает: «Мы начинаем изучение большого раздела математики – тригонометрии, и тема сегодняшнего урока неслучайна, ведь начинаем это изучение именно с числовой окружности, в течение 4 уроков, отведенных на эту тему, вы поймете почему. Но сначала нужно выяснить, почему вообще возникла тригонометрия, и какого ее значение в жизни общества. На последнем уроке этого раздела мы будем защищать проекты, и каждый должен выбрать себе тему. Проект состоит из презентации, буклета, сообщения (теоретического материала), и сайта. Примерные темы: В каких сферах человеческой деятельности полезно применить тригонометрию? Неизвестные факты из истории тригонометрии. Как легко запоминать тригонометрические формулы? Как мы познаем окружающий нас мир? Чаще всего нам приходится полагаться на свидетельства наших органов чувств — слуха, зрения, осязания, вкуса, обоняния. Но ведь многие явления окружающего мира скрыты от наших органов чувств. Они ничего не говорят нам о том, что Земля вращается вокруг своей оси и обращается вокруг Солнца. Они умалчивают о природе силы, удерживающей планеты на их орбитах. А ведь познание окружающего мира характерно для всех живых существ, в том числе и для человека, который научился эффективно приобретать новые знания, использовать их в своей жизни и накапливать для передачи последующим поколениям. Как же это происходит? В 1900 г., обращаясь к участникам II Международного конгресса математиков, один из величайших представителей современной математической науки Давид Гильберт заявил: «Математика — основа всего точного естествознания». С полным основанием можно добавить, что только математика позволила получить то знание о разнообразных жизненно важных явлениях, которыми мы ныне располагаем. По мере изучения какого-либо явления, перед человеком все больше открываются его свойства и связи с другими явлениями. В большинстве случаев законы, которые управляют ими, весьма сложны. Но среди громадного многообразия явлений ученые выделили такие, в которых взаимосвязь между величинами настолько тесна, что зная значение одной из	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: <u>1 балл.</u> Внимательно слушают рассказ учителя. Учащиеся выбирают тему проекта. Проект: <u>40 баллов.</u>

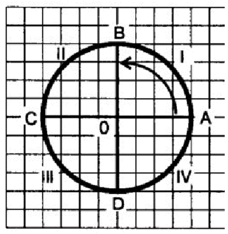
	них, можно узнать значение другой. Такие зависимости в математике называют функциональными. Давайте вспомним определение алгебраической функции.	Учащиеся отвечают: «Алгебраические функции – это функции, заданные аналитическими выражениями, в записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного корня)». Ответ: <u>2 балла.</u>
	Давайте вспомним, какие алгебраические функции мы изучали в курсе алгебры 7-9 классов.	Учащиеся отвечают: «Линейные, квадратичные, степенные, показательные».
	Выполнить задания: 1. Вспомнить уравнение прямой; для каждой прямой составить ее уравнение.  (*Ответ*: $y = x + 1$.)  (*Ответ*: $y = 3$.)  (*Ответ*: $y = - \| x$.)  (*Ответ*: $x = -1$.)	Учащиеся выполняют задания. Правильный ответ: <u>3 балла.</u>

	2. График какой из функций изображен на рисунке?  а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -x + 3$; в) $y = -(x - 3)^2$; г) $y = (x - 3)^2$; д) $y = x^3$; е) $y = \frac{1}{x} + 2$; ж) $y = \frac{1}{x}$; з) $y = -\frac{1}{x}$. **II. Решение задач** 1. Радианная мера двух углов треугольника $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$. Найдите радианную меру третьего угла и градусную меру каждого из углов. (*Ответ*: $\frac{\pi}{2}$; 60°; 30°; 90°.) 2. Найдите радианную меру углов треугольника, если их величины относятся как 2 : 3 : 4. (*Ответ*: $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$.) 3. Переведите из градусной меры в радианную следующие углы: 1°; 180°; 45°; 60°. Ответ: $\frac{\pi}{180}, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$. Итак, мы вспомнили некоторые алгебраические функции. Мы изучали их в курсе алгебры 7-9 классов, но математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями других классов, в частности, тригонометрических. Например, в астрономических расчетах (именно из них берет свое начало тригонометрия), при работе с различными навигационными приборами, при изучении движения различных тел, в искусстве и архитектуре и т.д. нам не обойтись без тригонометрии. Тригонометрические функции зачастую описывают периодические процессы, которые представляют особый интерес, т. к. очень многие процессы в окружающем мире имеют повторяющийся характер. Например, раз в год повторяется взаимное расположение Земли и Солнца. С течением времени повторяются день и ночь, приливы и отливы. Функции, которые описывают эти повторяющиеся процессы, так и называют периодическими. Для их изучения нам потребуется новая система координат, которая требует новое изображение, математическая модель. Какой геометрический образ на ваш взгляд наиболее тесно связан с периодическими процессами? Назовите математические понятия, которые вы вспоминаете, когда слышите слово «окружность».	Учащиеся приводят свои примеры применения тригонометрии.

	Напомню, что в курсе математики было доказано существование интересного факта – отношение длины окружности к диаметру окружности есть величина постоянная и равна приблизительно 3,14. Эту постоянную величину обозначили буквой **π**. Таким образом, мы вспомнили, что длину дуги окружности можно найти с помощью формулы **C = 2 πR**. Известная вам система координат связана с координатной прямой. **Координатная прямая** – это прямая, на которой задано (что?) Любому действительному числу мы можем сопоставить точку на прямой и наоборот. Как по числу *x* найти на прямой соответствующую точку *M?* Числу 0 соответствует начальная точка *O*. Если *x* > 0, то, двигаясь по прямой из точки *O* в положительном направлении, нужно пройти путь длиной *x*. Конец этого пути и будет искомой точкой *M(x)*. Если *x* < 0, то, двигаясь по прямой из точки 0 в отрицательном направлении, нужно пройти путь длиной | *x* |. Конец этого пути и будет искомой точкой *M(x)*. Число *x* — координата точки M. А как решается обратная задача, как найти координату *x* заданной точки *M* на числовой прямой?	Учащиеся отвечают: «числовая окружность. Центр окружности; радиус окружности - отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой, лежащей на данной окружности; диаметр окружности - отрезок, проходящий через центр окружности, соединяющий две точки, лежащие на данной окружности, D = 2R; длина окружности; дуга окружности». Ответы записываются в тетрадь, правильный ответ: 2 балла. Учащиеся записывают в тетрадь определение и формулу. Учащиеся отвечают: « 1) начало отсчета, 2) направление, 3) единичный отрезок». Записывают в тетрадь

	Надо найти длину отрезка *ОМ* и взять ее со знаком «+» или «-» в зависимости от того, с какой стороны от точки *О* расположена на прямой точка *М*. Но в реальной жизни двигаться приходится не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности. Вот конкретный пример. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью, и пусть ее длина равна 400 м. Отмечаем старт — точку А.  Бегун из точки А движется по окружности против часовой стрелки. Где он будет через 200 м? через 400 м? через 800 м? через 1500 м? А где провести финишную черту, если он бежит марафонскую дистанцию 42 км 195 м? Через 200 м он будет находиться в точке С, диаметрально противоположной точке А (200 м — это длина половины беговой дорожки, т.е. длина половины окружности). Пробежав 400 м («один круг»), он вернется в точку А. Пробежав 800 м («два круга»), он вновь окажется в точке А. А что такое 1500 м? Это «три круга» (1200 м) плюс еще 300 м, т.е. 3/4 беговой дорожки — финиш этой дистанции будет в точке *D*. Нам осталось разобраться с «марафоном». Пробежав 105 кругов, спортсмен преодолеет путь 105-400=42000 м, т.е. 42 км. До финиша остается 195 м, это на 5 м меньше половины длины окружности. Значит, финиш марафонской дистанции будет в точке *М*, расположенной около точки С. По беговой дорожке стадиона можно пробежать или пройти путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, и любому отрицательному числу можно поставить в соответствие точку беговой дорожки стадиона — просто спортсмен должен бежать в противоположном направлении (т.е. стартовать из А не в направлении против, а в направлении по часовой стрелке). Тогда беговую дорожку стадиона можно рассматривать как *числовую окружность*. В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную окружность - окружность радиусом 1. Это будет наша «беговая дорожка», ее длина равна 2л, что составляет примерно 6,28».	определение. Правильный ответ: 2 балла. Учащиеся внимательно слушают рассказ учителя.

ИМ

Урок 1		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить усвоение знаний по теме «Координатная окружность». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Повторить определение синуса и косинуса угла, продолжить работу с «азбукой» функции, продолжить решение задач по изученному материалу, разобрать определение числовой окружности и примеры, приведенные в §2, закрепить изученный	Учитель продолжает лекцию: «Для облегчения восприятия материала о числовой окружности рассмотрим ряд вспомогательных геометрических примеров. **Пример 1.** Дана окружность радиусом 1см. Чему равна длина окружности, ее половины, ее четверти? Решение. Длина L окружности радиусом R вычисляется по формуле $L = 2\pi R$, где $\pi \approx 3{,}14$. Если $R = 1$ см, то $L = 2\pi$ см $\approx 6{,}28$ см. Длина половины окружности равна π см, а длина четверти окружности (AB, BC, CD или DA) равна $\frac{\pi}{2}$ см. *Ответ*: $\approx 6{,}28$ см; $\approx 3{,}14$ см; $\approx 1{,}57$ см.  Рис. 1	Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

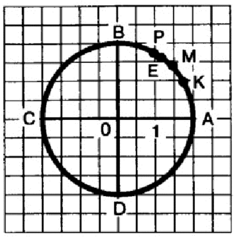
<table>
<tr>
<td>материал в ходе выполнения упражнений.
Рассмотреть числовую окружность в декартовой системе координат, учиться находить абсциссу и ординаты точек на окружности.</td>
<td>

Рис. 2

В дальнейшем будем говорить об окружности, радиус которой равен масштабному отрезку, без указания конкретных единиц измерения. Радиус такой окружности считается равным 1, а саму окружность называют единичной. Мы все время будем пользоваться единичной окружностью, в которой проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB (см. рис. 1) первой четвертью, дугу BC — второй четвертью, дугу CD — третьей четвертью, дугу DA — четвертой четвертью. При этом, как правило, речь идет об открытых дугах, т.е. о дугах без их концов: например, первая четверть — это дуга AB без точек A и B.

Пример 2. В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а точками K и P — на три равные части (рис. 2). Чему равны длины дуг AM, MB, AK, KP, PB, AP и KM?

Решение. Так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ (будем писать кратко: $AB = \frac{\pi}{2}$), то, разделив ее на две равные части точкой M, получим две дуги длиной $\frac{\pi}{4}$ каждая. Значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

Если дуга AB разбита на три равные части точками K и P, то длина каждой полученной части равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$, т.е. $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AK = KP = PB = \frac{\pi}{6}$.

Дуга AP состоит из двух дуг AK и KP длиной $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AP = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Осталось вычислить длину дуги KM. Эта дуга получается из дуги AM отбрасыванием дуги AK. Значит, длина дуги KM равна разности длин дуг AM и AK. Таким образом, $KM = AM - AK = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Взгляните еще раз на рис. 1. Сколько вы видите дуг единичной окружности, соединяющих точки А и В?
Условимся в двухбуквенном обозначении дуги на первом месте писать букву, соответствующую началу дуги, а на втором – букву, соответствующую концу дуги, причем движение по окружности от начала дуги к ее концу будем осуществлять в направлении против часовой стрелки. Тогда меньшая из дуг – АВ, а большая – ВА.

Пример 3. Вторая четверть единичной окружности разделена пополам точкой M (рис. 3), а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равны длины дуг AM, AK, AP, PB, MK, KM?

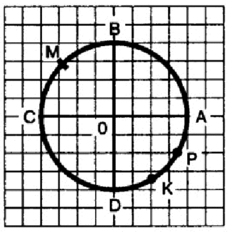
Решение. Прежде чем переходить к требуемым вычислениям, заметим, что
$AB = BC = CD = DA = \frac{\pi}{2}$, $BM = MC = \frac{\pi}{4}$,
$DK = KP = PA = \frac{\pi}{6}$. Значит,


Рис. 3
$$AM = AB + BM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$
$$AK = AB + BC + CD + DK = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3};$$
$$AP = AD + DP = \frac{3\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6};$$
$$PB = PA + AB = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3};$$
$$MK = MC + CD + DK = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12};$$
$$KM = KP + PA + AB + BM = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$

Во всех разобранных примерах длины дуг выражаются некоторыми долями числа π. Т.к. длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаются дуги, длины которых выражаются долями числа π.
Давайте выясним, можно ли найти на единичной</td>
<td>Учащиеся отвечают: «Две».

Учащиеся работают в тетрадях, записывают решения примеров.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>окружности такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1.

$\pi \approx 3{,}14;\quad \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047;\quad \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785.$

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$.

Обратимся снова к рис. 2. Если $AE = 1$, то точка E находится между точками M и P, ближе к точке P. Разумеется, точно (а не приблизительно) указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

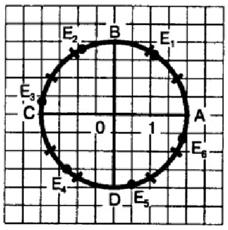


Рис. 4

Рассуждая аналогичным образом, делаем вывод, что на единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для которой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рис. 4 отмечены (приблизительно) соответствующие точки, причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена черточками на три равные части.

Домашнее задание:
1. Построить графики функций
а) $y = -3(x-2)^2 + 4$;
б) $y = \left|\frac{2}{x} + 3\right|$
2. Решить номера 2,4.
3. Повторить определение синуса и косинуса угла (учебника геометрии Атанасяна).
4. Координатную окружность разделить на 12 равных частей, каждой точке поставьте в соответствие число, выраженное в долях π.</td>
<td>Учащиеся записывают домашнее задание.</td>
</tr>
</table>

Ответы и решения:

а) $y=-3(x-2)^2+4$.

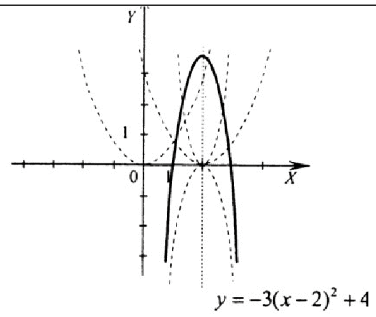
а) $y=x^2$;

б) $y=(x-2)^2$;

в) $y=3(x-2)^2$;

г) $y=-3(x-2)^2$;

д) $y=-3(x-2)^2+4$.



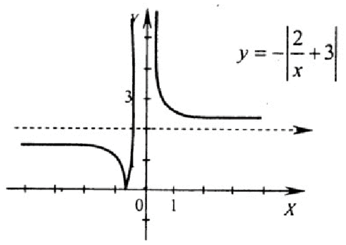
б) $y=-\left|\frac{2}{x}+3\right|$.

а) $y=\frac{1}{x}$;

б) $y=\frac{2}{x}$;

в) $y=\frac{2}{x}+3$;

г) $y=-\left|\frac{2}{x}+3\right|$



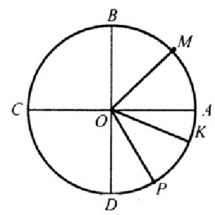
№ 2

$l_{АМ}=\frac{\pi}{4}$; $l_{ВД}=\pi$;

$l_{СК}=\frac{2\pi}{3}$; $L_{МР}=\frac{19\pi}{12}$;

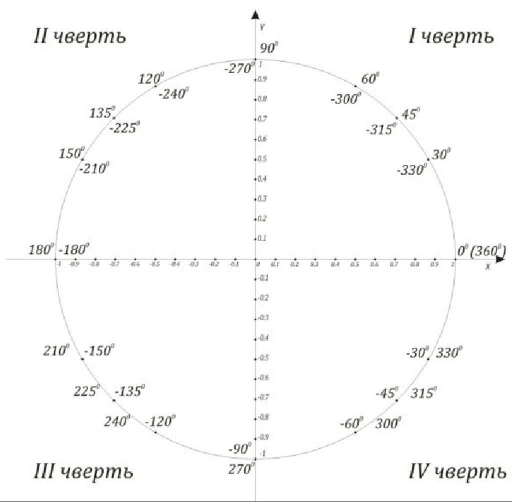
$l_{ДМ}=\frac{3\pi}{4}$; $l_{МК}=\frac{17\pi}{12}$;

$l_{СР}=\frac{5\pi}{6}$; $l_{АМ}=\frac{7\pi}{6}$



№ 4. $l_{СР}=\frac{\pi}{12}$; $l_{РД}=\frac{5\pi}{12}$; $l_{АР}=\frac{13}{12}\pi$.

4.



		Максимальное количество баллов за урок: 36

ИМ

Урок 2		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации**

<table>
<tr><td></td><td></td><td>по выполнению заданий, оценка</td></tr>
<tr><td></td><td>

Приветствие. Проверка отсутствующих.

Мы продолжаем изучение числовых окружностей. Для начала, проверим домашнее задание.

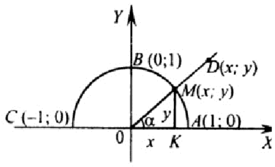
Выполните задания:

1. Построить график функции:

$y=\frac{3x-x^3}{6x}$; $y=\frac{3x-x^3}{6x}$; $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x^2$; $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}$ и т. д.

$D(y)$: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Вспомнить определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α.



Из Δ OMK: $\sin\alpha=\frac{MK}{OM}=\frac{y}{r}=y$;

$\cos\alpha=\frac{OK}{OM}=\frac{x}{r}=x$; $\text{tg}\alpha=\frac{y}{x}$; $\text{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$.

3. Найти угол между лучом OM и положительной полуосью OX если точка M имеет координаты:

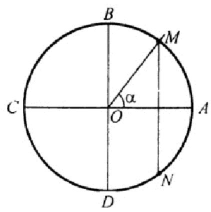
а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) (0; 1); в) (3; 0).

(*Ответы*: а) 45°; б) 90°; в) не существует.)

4. Найти угол между лучом OD и осью OX, если точка D имее координаты:

а) (2; 2); б) (–2; 2); в) ($\sqrt{3}$; 3).

(*Ответы*: а) 45°; б) 135°; в) 30°.)



5. № 7. $\cos\angle AOM=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle AOM=60°$;

$MN=2\sin\angle AOM=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$;

$l=\frac{2\pi r}{360°}\cdot\alpha=\frac{\pi r}{180°}\cdot\alpha \Rightarrow l_{AM}=\frac{\pi\cdot1\cdot60°}{180°}=\frac{\pi}{3}$; $l_{MB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$l_{AN}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$.

</td><td>

Присутствие: <u>1 балл.</u>

Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: <u>2 балла.</u>

Учащиеся выполняют задания.

Правильный ответ: <u>3 балла</u>.

</td></tr>
</table>

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длины t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длины $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью**.

Пример 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для отыскания соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки А в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$.

Имеем (рис. 1): $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; $B = B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, $AC = \pi$, значит, числу π соответствует точка C, т.е. $C = C(\pi)$; $AD = \frac{3\pi}{2}$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, т.е. $D = D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, т.е. ровно одну окружность, мы попадем в начальную точку A; итак, $A = A(2\pi)$.

Что такое $\frac{7\pi}{2}$? Это $2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно пройти целую окружность (путь длиной 2π) и дополнительно путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который закончится в точке D. Итак, $D = D\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Что такое 9π? Это $4\cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно четыре раза описать целую окружность (путь длиной $4\cdot 2\pi$) и дополнительно еще путь длиной π, который закончится в точке C. Итак, $C = C(9\pi)$.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно, отправившись из точки A, пройти по окружности в **отрицательном направлении** (напомним, по часовой стрелке) путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке B, т.е. $B\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Замечание. При работе с числовой прямой обычно уславливаются, ради краткости, не говорить «точка прямой, соответствующая числу x», а говорить «точка x». Точно такой же договоренности будем придерживаться и при работе с числовой окружностью: «точка t» — это значит, что речь идет о точке окружности, которая соответствует числу t.

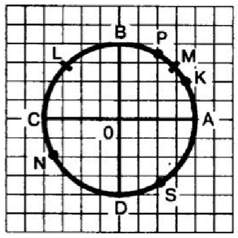


Рис. 6

Пример 2. Найти на числовой окружности точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив первую четверть AB на три равные части точками K и P (рис. 6), получим $K = K\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Разделив дугу AB пополам точкой M, получим $M = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Обратите внимание: этот пример фактически уже решен в § 1 (см. пример 2).

Пример 3. Найти на числовой окружности точки $\frac{-5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Решение. Построения будем делать, используя рис. 6. Отложив дугу AM длиной $\frac{\pi}{4}$ от точки A пять раз в отрицательном направлении, получим точку L — середину дуги BC. Итак, $L = L\left(\frac{-5\pi}{4}\right)$.

Отложив дугу AK длиной $\frac{\pi}{6}$ от точки A семь раз в положительном направлении, попадем в точку N, которая принадлежит третьей четверти — дуге CD, причем $CN = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги CD). Итак, $N = N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A десять раз в положительном направлении, попадем в точку S, которая принадлежит четвертой четверти — дуге DA, причем $DS = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги DA). Итак $S = S\left(\frac{10\pi}{6}\right) = S\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

Самостоятельно нанести на числовой окружности точки:

$\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; π; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{6}$.

Учащиеся выполняют задание, затем сверяют с макетом на доске результаты.

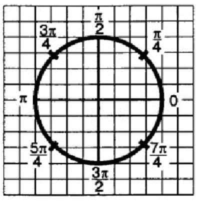


Рис. 7

ПЕРВЫЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части и около каждой из имеющихся восьми точек записаны их «имена» (рис. 7).

ВТОРОЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части и около каждой из имеющихся двенадцати точек записаны их «имена» (рис. 8).

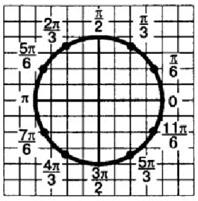


Рис. 8

Учтите, что и на том, и на другом макете мы могли бы заданным точкам присвоить другие «имена». Так, числу $-\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$.

Вообще, если двигаться по первому макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно $0, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, если двигаться по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно $0, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \ldots, -\frac{11\pi}{6}$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, −7.

Решение. Точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, — это точки $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ на рис. 4 (см. конец предыдущего параграфа). А вот о точке −7 поговорим подробнее.

Нам нужно, отправляясь из точки A и двигаясь в отрицательном направлении (по часовой стрелке), пройти по окружности путь длиной 7. Если пройти одну окружность, то получим (приближенно) 6,28, значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь длиной 0,72. Что же это за дуга? Она немного меньше половины четверти окружности, т.е. ее длина меньше числа $\frac{\pi}{4}$, потому что $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$; ясно, что $0{,}72 < 0{,}785$. Точка $M = M(-7)$ отмечена на рис. 9 (мы немного не дошли до середины четвертой четверти).

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Для прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно; выше мы неоднократно убеждались в этом.

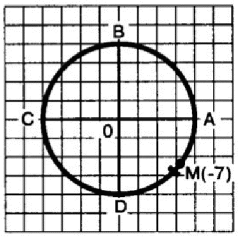


Рис. 9

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и любому числу вида $t + 2\pi k$, где k — любое целое число ($k \in \mathbb{Z}$).

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число $|k|$ можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или другую сторону. Например, если $k = 3$, то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если $k = -7$, то это значит, что мы делаем семь $(|k| = |-7| = 7)$ обходов окружности в отрицательном направлении. Но если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив еще k полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке M. Итак,

$$\boxed{M(t) = M(t + 2\pi k).}$$

На двух макетах (рис. 7, 8) указаны лишь главные имена точек — числа, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$, т.е. числа, возникающие при первом обходе окружности в положительном направлении. На самом деле, у точки $\frac{\pi}{4}$ бесконечно много имен: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$; у точки $\frac{5\pi}{6}$ тоже бесконечно много имен: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$ и т.д.

Учащиеся работают в тетрадях, записывают решения примеров.

Число k иногда называют *параметром*. Впрочем, параметр можно обозначить и другой буквой, например, n и m.

Замечание. Условимся в дальнейшем не писать каждый раз: $k \in Z$ или $n \in Z$ (но, естественно, мы все время будем это подразумевать).

Пример 5. Найти на числовой окружности точку: а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение. а) Имеем:

$$\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{4}\pi = \left(4 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 2.$$

Значит, числу $\frac{21\pi}{4}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$ — середина третьей четверти (см. первый макет — рис. 7).

б) Имеем:

$$-\frac{37\pi}{6} = -\frac{37}{6}\pi = -\left(6 + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi = -6\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot (-3).$$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{6}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $-\frac{\pi}{6}$, — это точка с именем $\frac{11\pi}{6}$ на втором макете (рис. 8).

Пример 6. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка 20?

Решение. Представим число 20 в виде $t + 2\pi k$ и подберем значение k так, чтобы число t попало в отрезок $[0, 2\pi]$ (или $[-2\pi, 0]$). Тогда мы сможем определить, какой четверти принадлежит точка t, а с ней и точка 20 (поскольку на числовой окружности t и $t + 2\pi k = 20$ — одна и та же точка).

Сделаем прикидку: $2\pi \approx 6{,}28$, значит, $2\pi k \approx 6{,}28k$; надо подобрать целое число k так, чтобы число $6{,}28k$ оказалось как можно ближе к числу 20. Очевидно, что $k = 3$. Имеем $6{,}28 \cdot 3 = 18{,}84$. Значит, $20 = 1{,}16 + 6{,}28 \cdot 3 \approx 1{,}16 + 2\pi \cdot 3$. Точка 1,16 находится в первой четверти, значит, и точка 20 принадлежит первой четверти.

Вы знаете, что промежутки на числовой прямой можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической записью отрезка $[3, 5]$ (рис. 10) служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической записью интервала $(-4, 0)$ (рис. 10) служит двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют дуги. Их тоже можно записывать аналитичес-

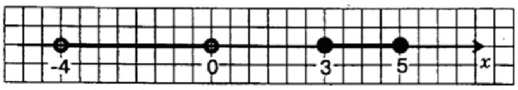


Рис. 10

Мурмилова Екатерина Сергеевна

ки с помощью двойных неравенств, но при этом, естественно, следует учитывать, что, в отличие от числовой прямой, где каждая точка имеет одно «числовое имя», на числовой окружности у точки бесконечно много имен. В следующем примере мы покажем, как составляется аналитическая запись дуги числовой окружности.

Пример 7. Найти все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие дугам:

а) AB; б) BA; в) BD; г) DB; д) KM; е) MK (здесь K и M соответственно середина первой и третьей четвертей числовой окружности).

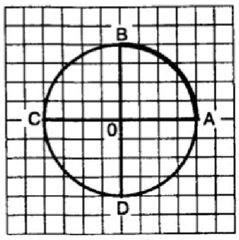


Рис. 11

Решение. а) Дуга AB — это дуга с началом в точке A и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 11). Главные «имена» точек A и B соответственно $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Значит, для точек t дуги AB имеем:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Как мы видели ранее, точка A соответствует не только числу 0, но и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т.е. $2\pi k$; точка B соответствует не только числу $\frac{\pi}{2}$, но и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Значит, если мы хотим охарактеризовать все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки дуги AB, то придется использовать такую запись:

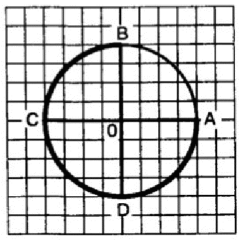


Рис. 12

$$2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \qquad (2)$$

Для удобства будем пользоваться следующей (не общепринятой) терминологией: неравенство (1) — *ядро аналитической записи дуги AB*, неравенство (2) — *аналитическая запись дуги AB*.

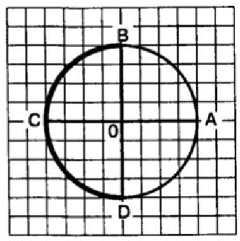


Рис. 13

б) Дуга BA — это дуга с началом в точке B и концом в точке A при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 12). Главные «имена» точек B и A в этом случае — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и 2π. Значит, ядром аналитической записи дуги BA является неравенство

$$\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

а сама аналитическая запись дуги BA имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi k.$$

в) Дуга BD — это дуга с началом в точке B и концом в точке D при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 13). Главные «имена» точек B и D — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Значит, ядром аналитической записи дуги BD является неравенство

$$\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

а сама аналитическая запись дуги BD имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$$

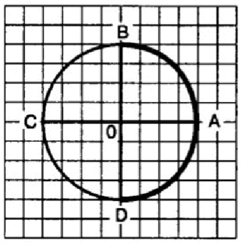


Рис. 14

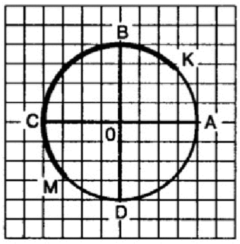


Рис. 15

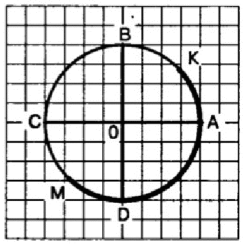


Рис. 16

г) Дуга DB — это дуга с началом в точке D и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 14). Главные «имена» точек D и B в этом случае — соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (а не $\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, как в предыдущем случае; при записи ядра нужно следить за тем, чтобы число в левой части неравенства было меньше числа в правой части неравенства). Значит, ядром аналитической записи дуги DB является неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а сама аналитическая запись дуги DB имеет вид:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

д) Дуга KM — это дуга с началом в точке K и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 15). Главные «имена» точек K и M — соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KM является неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги KM имеет вид:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

е) Дуга MK — это дуга с началом в точке M и концом в точке K при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 16). Главные «имена» точек M и K в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MK является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MK имеет вид:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

§ 3. ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат $x0y$ так, как показано на рис. 17: центр окружности совмещен с началом координат, а ее радиус принимается за масштабный отрезок. Начальная точка A числовой окружности совмещена с точкой (1; 0) на оси x. При этом $B = B(0; 1)$, $C = C(-1; 0)$, $D = D(0; -1)$. Каждая точка числовой окружности имеет в системе $x0y$ свои координаты, причем (см. рис. 17) для точек:

первой четверти $x > 0$, $y > 0$;
второй четверти $x < 0$, $y > 0$;
третьей четверти $x < 0$, $y < 0$;
четвертой четверти $x > 0$, $y < 0$.

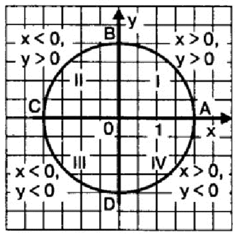


Рис. 17

Для любой точки $M(x;\ y)$ числовой окружности выполняются неравенства:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1;\quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности. Для этого заметим, во-первых, что центром окружности служит начало координат, а уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$; во-вторых, $R = 1$, значит, уравнение числовой окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

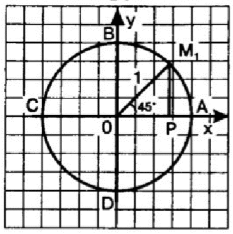


Рис. 18

Нам важно научиться отыскивать координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на двух макетах (см. рис. 7, 8). Начнем с точек первого макета: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1m на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P (рис. 18). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то $\angle AOM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник, где $OP = M_1P$, т.е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: $x = y$. Кроме того, координаты точки $M_1(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, для отыскания координат точки M_1 нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим: $x^2 + x^2 = 1$, т.е. $2x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как $y = x$, то и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Проанализируем полученное равенство. Что означает запись $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Она означает, что точка M_1 числовой окружности соответствует числу $\frac{\pi}{4}$. А запись $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ означает, что точка M_1 имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат $x0y$. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если написано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x;\ y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом,

$(x; y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$— середину второй четверти. Рассуждая, как и выше, получим для модуля абсциссы и для модуля ординаты этой точки те же значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, что и для точки M_1. Помня, что во второй четверти $x < 0$, а $y > 0$, делаем вывод:

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)=M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — имеем:

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)=M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$— середины четвертой четверти — имеем:

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)=M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Точка окружности	0	$\frac{\pi}{4}$ (M_1)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$ (M_2)	π	$\frac{5\pi}{4}$ (M_3)	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$ (M_4)	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Теперь найдем координаты точек, изображенных на втором макете (см. рис. 8). Возьмем точку $M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$,опустим из нее перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1P (рис. 19). Гипотенузой этого треугольника является отрезок OM_1, причем $OM_1 = 1$. Угол M_1OP равен 30°, поскольку дуга AM_1 составляет треть дуги AB, а дуга AB содержит 90°. Из геометрии известно, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против

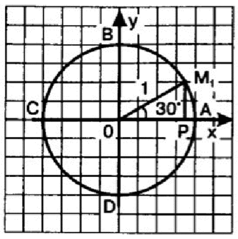


Рис. 19

угла 30°, равен половине гипотенузы. Значит, $M_1P=\frac{1}{2}$ — это ордината точки M_1, т.е.

$$y=\frac{1}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$OP^2=OM_1^{\ 2}-M_1P^2.$$

Значит,

$$x^2=OP^2=OM_1^{\ 2}-M_1P^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

т.е.

$$x^2=\frac{3}{4},\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(мы учли, что точка $\frac{\pi}{6}$ принадлежит первой четверти, а потому обе ее координаты — положительные числа).

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)=M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

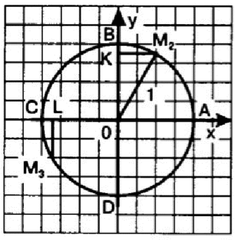


Рис. 20

С точкой $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ связан такой же прямоугольный треугольник, как и с точкой M_1, только ориентированный по-другому (рис. 20). Получаем: $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=M_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Те же самые значения (с точностью до знака) будут координатами остальных точек второго макета, исключая, разумеется, точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, причем по чертежу нетрудно определить, какая координата равна по модулю числу $\frac{1}{2}$, а какая — числу $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Возьмем для примера точку $M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (см. рис. 20). Будем рассуждать так. Опустим перпендикуляр M_3L на ось x. Во-первых, $M_3L<LO$, т.е. $|y|<|x|$. Значит, из двух чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в качестве ординаты точки M_3 нужно взять меньшее, т.е. $\frac{1}{2}$, а в качестве абсциссы — большее, т.е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Во-вторых, $\frac{7\pi}{6}$ — точка третьей четверти, а потому $x<0$ и $y<0$.

Окончательно получаем:

$$M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)=M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right).$$

А теперь возьмите точку $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и попробуйте, проведя аналогичные рассуждения, найти ее координаты. Мы же пока приведем итоговую таблицу, с помощью которой вы сможете проверить правильность своего вывода.

Точка окружности	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Теперь проверьте себя по таблице: $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)=M_4\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 1. Найти координаты точек числовой окружности: а) $P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$; б) $P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; в) $P_3(45\pi)$; г) $P_4(-18\pi)$.

Решение. Во всех четырех случаях воспользуемся утверждением, полученным в § 2: числам t и $t+2\pi k\,(k\in Z)$ соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) Имеем:

$$\frac{45\pi}{4}=\frac{45}{4}\cdot\pi=\left(10+\frac{5}{4}\right)\cdot\pi=10\pi+\frac{5\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot 5.$$

Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 7 и таблицу на с. 19). Для точки $\frac{5\pi}{4}$ имеем $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)=P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) Имеем:

$$-\frac{37\pi}{3}=-\frac{37}{3}\cdot\pi=-\left(12+\frac{1}{3}\right)\pi=-12\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot(-6).$$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности что и числу $-\frac{\pi}{3}$. А числу $-\frac{\pi}{3}$ соответствует на числовой окружности та ж точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$ (см. второй макет — рис. 8 и таблицу на с. 21). Дл точки $\frac{5\pi}{3}$ имеем $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=P_2\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) $45\pi=44\pi+\pi=\pi+2\pi\cdot 22$. Значит, числу 45π соответствует та же точк числовой окружности, что и числу π, — это точка $C(-1;\ 0)$. Итак,

$$P_3(45\pi)=P_3(-1;\ 0).$$

г) $-18\pi=0+2\pi\cdot(-9)$. Значит, числу -18π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1;\ 0)$. Итак,

$$P_4(-18\pi)=P_4(1;\ 0).$$

Пример 2. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y=\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (рис. 21). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (см. второй макет — рис. 8), а значит, и любому числу вида $\frac{\pi}{6}+2\pi k$. Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. Получили, как часто говорят в таких случаях, *две серии значений:* $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

Ответ: $t=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $t=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

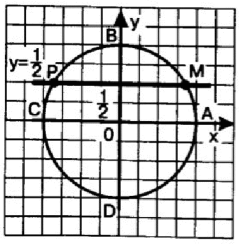


Рис. 21

Пример 3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (рис. 22). Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 7), а значит, и любому числу вида

$\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

Ответ: $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $t=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$.

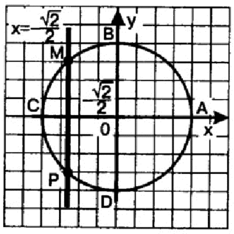


Рис. 22

Замечание. В примере 3 можно было рассуждать немного по-другому: точка P соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. Получим две серии значений: $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ (для точки M) и $t=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ (для точки P). Чем это решение лучше по сравнению с приведенной записью ответа к примеру 3? Только тем, что серии значений можно охватить одной записью: $t=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y>\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (см. рис. 21). Неравенству $y>\frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP, т.е. дуги без концов M и P. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек M и P — соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MP является неравенство

$$\frac{\pi}{6}<t<\frac{5\pi}{6},$$

а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$$

Пример 5. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y<\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (см. рис. 21). Неравенству $y<\frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек

P и M в этом случае — соответственно $-\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Значит, ядром аналитической записи дуги PM является неравенство

$$-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6},$$

а сама аналитическая запись дуги PM имеет вид:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (см. рис. 22). Неравенству $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги PM является неравенство $-\frac{3\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$,

а сама аналитическая запись дуги PM имеет вид:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Пример 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и P (рис. 22). Неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные «имена» точек M и P в этом случае — соответственно $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MP является неравенство $\frac{3\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$, а сама аналитическая запись дуги MP имеет вид:

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

Домашнее задание:

1. §2, задание №8, 14 (а), 18
2. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y = (x+1)^2 - 3 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

Ответы и решения:

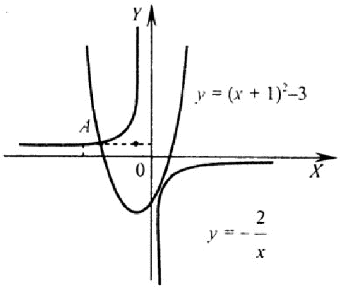
1. *№ 8*

$AM = NA = 60°$
$MB = DN = 30°$
$BP = QD = 30°$
$PC = CQ = 60°$

$\Rightarrow AM = MP = PC = CQ = QN = NA = 60°$

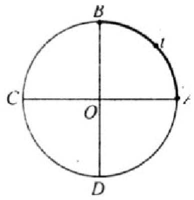
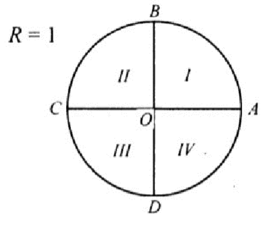
№ 14. Используем основное тригонометрическое тождество:

$\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$

	№ 18 а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ k \in Z;$ б) $5 + 2\pi k;\ k \in Z;$ в) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ k \in Z;$ г) $-3 + \pi k;\ k \in Z.$ 2. $\begin{cases} y = (x+1)^2 - 3; \\ y = -\frac{2}{x}; \end{cases}$ $A\ (-2{,}8;\ 1)$ (*Ответ*: $x \approx -2{,}8;\ y \approx 1$.)  	Учащиеся записывают домашнее задание.
		Максимальное количество баллов за урок: <u>26</u>

<u>РМ</u>

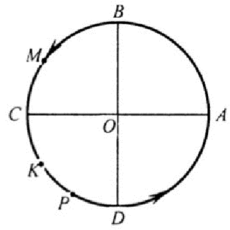
Урок 3		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме «Координатная	Приветствие. Проверка отсутствующих. Мы продолжаем изучение числовых окружностей. Для начала, проверим домашнее задание.	Присутствие: <u>1 балл.</u> Учащиеся сдают тетради с

окружность». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	**Устная работа:** 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$. *Ответы*: I; I; II; IV; III; III; I. В какой четверти расположена точка, соответствующая данному числу: $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{25\pi}{6}$; $\frac{16\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$.  1. № 29 (в, г), 30 (б, г), 32 (б, г). (*Ответы*: $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; (0, 1); (0; 1); (–1; 0); $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.) 2. № 35 (а, в) по готовому чертежу на доске, № 36 (б, г). (*Ответы*: 35 (а, в): а) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; в) (1; 0) и (–1; 0) $t = \pi n$, $n \in z$.) 3. № 37 (в), 38 (а; г). ***№ 36 (б, г)*** б) (0; 1); $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in z$; г) (0; –1); $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in z$. ***№ 37 (в)*** (1; 0); $y = 2\pi n$; $n \in z$. ***№ 38 (а, г)*** а) (0; 1) и (0; –1) $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in z$. г) (–1; 0); $y = \pi + 2\pi n$; $n \in z$. **Выполнение упражнений:** Начертить в тетради следующий рисунок:  По рис. 4 учебника найти точки, для которых длины дуг $AE_1 = 1$; $AE_2 = 2$.	домашним заданием, правильный ответ: <u>2 балла.</u> Учащиеся устно решают задания. Правильный ответ: <u>1 балл</u>. Учащиеся работают в тетрадях, решают задания из учебника, объединившись в группы по 4 человека.

№ 1. Разобрать задание по чертежу с самостоятельной записью в тетрадях и последующей проверкой.

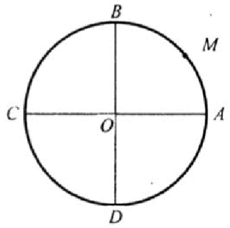
$AM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$;

$BK = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ и т. д.



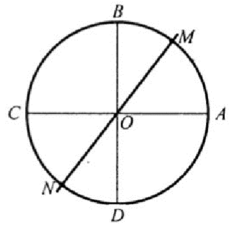
$AM : MB = 2 : 3$. Заметив, что $AB = \frac{\pi}{2}$.

Решить задачу устно.



№ 5. Точка N будет находится на пересечении диаметра с окружностью.

№ 6. Можно, так как $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$; $\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$ и т. д.



Работа у доски:
Выполнить №17 (с объяснением), №19.

Один из учащихся выходит к доске, выполняет упражнения. 2 балла.

Выполнение упражнений:

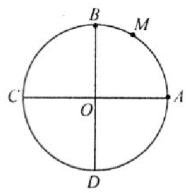
№ 24

а) $t\ (2\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\ ),\ k \in z;$

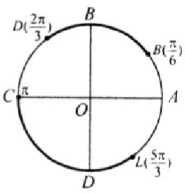
б) $t \in (-\pi + 2\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\ ),\ k \in z;$

в) $t \in (\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k),\ k \in z;$

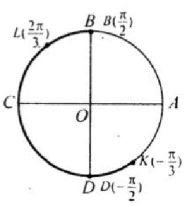
г) $t \in (\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k),\ k \in z.$



№ 27 (а, г)
а) дуга BD;
г) дуга CL.



№ 28 (а, г)
а) дуга BD;
г) дуга KL.



Учащиеся продолжают работать в тетрадях, решают задания из учебника, объединившись в группы по 4 человека.

1) **№ 33 (а, г)**

а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\min_{"+"}=\frac{\pi}{6}$; $\max_{"-"}=-\frac{11\pi}{6}$; $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$;

$\min_{"+"}=\frac{7\pi}{6}$; $\max_{"-"}=\frac{5\pi}{6}$.

№ 34 (а, в)

а) $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\min_{"+"}=\frac{\pi}{3}$; $\max_{"-"}=-\frac{5\pi}{3}$; $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\min_{"+"}=\frac{4\pi}{3}$; $\max_{"-"}=-\frac{2\pi}{3}$.

№ 42 (в, б)

б) $x<0;\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$;

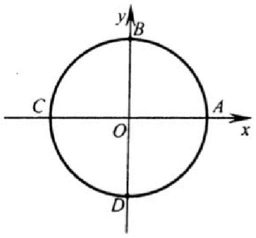
в) $y=\frac{1}{2};x>0;\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

№ 43 (а, г)

а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ n\in z$;

г) $M\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ n\in z$.

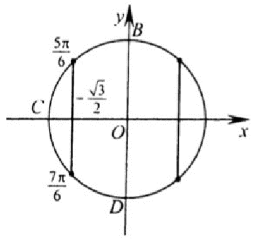
№ 44 (а, г)



а) $x>0;\ t\in(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n)$; $n\in z$;

г) $x<0;\ t\in(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n)$; $n\in z$.

№ 46 (б, в)



б) $x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t\in\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$; $k\in z$.

в) $x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$; $k\in z$.

№ 48 (б, г)

$y>-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ k\in z.$

$y<-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{7\pi}{4}+2\pi k;\ k\in z.$

№ 49 (а, в)

$y\le\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{4\pi}{3}+2\pi k\le t\le\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ k\in z.$

$y\ge\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\le t\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ k\in z.$

Самостоятельная работа

Вариант I: № 21, 27 (б), 28 (в).

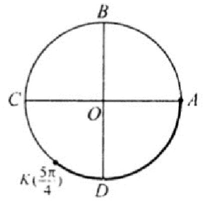
Вариант II: № 22, 27 (в), 28 (б).

Ответы и решения:

Вариант I

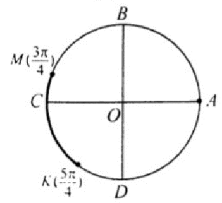
№ 21. а) IV; б) II; в) II; г) III.

№ 27 (б)



дуга AK

№ 28(в)

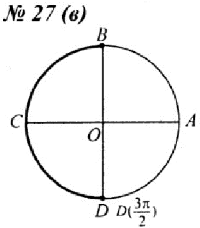


дуга MK

Вариант II

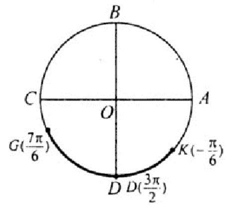
№ 22. а) IV; б) I; в) II; г) III.

№ 27 (в)



дуга BD

№ 28 (б)



дуга KG

Учащиеся выполняют самостоятельную работу. Правильный ответ: 4 балла.

Домашняя контрольная работа:

1. § 2, № 23, 26.
2. При каких значениях x выражение $\sqrt{9-8x-x^2}$ имеет смысл?
3. Решить неравенство: $\frac{x+11}{(x-8)(3x+2} \leq 0$
4. § 3, № 29 (а), 30 (а), 31 (а), 32 (а).
5. № 33 (б, в), 34 (б, в), 48, 46 (а, г).
6. Сколько решений имеет система уравнений? $\begin{cases} y = \lvert (x+2)^2 - 3 \rvert \\ y = x^3 + 2 \end{cases}$

Ответы и решения:

Учащиеся записывают домашнее задание.

№ 23

а) III; б) II; в) IV; г) IV.

№ 26

а) $t \in (\pi/4 + 2\pi k;\ 3\pi/4 + 2\pi k);\ k \in z;$

б) $t \in (-\pi/4 + 2\pi k;\ -\pi/4 + 2\pi k);\ k \in z;$

в) $t \in (-3\pi/4 + 2\pi k;\ 3\pi/4 + 2\pi k);\ k \in z;$

г) $t \in (\pi/4 + 2\pi k;\ 5\pi/4 + 2\pi k);\ k \in z.$

2. $\sqrt{9-8x-x^2}$; $9 - 8x - x^2 \geq 0$; $x^2 + 8x - 9 \leq 0$; $(x - 1)(x + 9) \leq 0$.

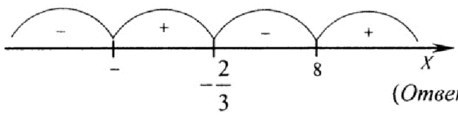
Метод интервалов:

(*Ответ*: $x \in [-9; 1]$.)

3. $\dfrac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \leq 0$. Используем метод интервалов.

Найдем нули функции $f(x) = \dfrac{x+11}{(x-8)(3x+2)}$ и $D(f)$.

$x = 11$; $x \neq 8$; $x \neq -\dfrac{2}{3}$; $x \in (-\infty; -11] \cup (-\dfrac{2}{3};\ 8)$.



(*Ответ*: $(-\infty; -11] \cup (-\frac{2}{3}; 8)$.)

4 ***№ 29 (а)***

$$M(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

№ 30 (а)

$M(2\pi) = (1; 0)$

№ 32 (а)

$$M(\frac{19\pi}{6}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

5 ***№ 33 (б, в)***

б) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$: $\min_{+}=\frac{11\pi}{6}$; $\max_{-}=-\frac{\pi}{6}$;

в) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$: $\min_{+}=\frac{5\pi}{6}$; $\max_{-}=-\frac{7\pi}{6}$.

№ (б, г)

б) $M\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $\min_{+}=\frac{2\pi}{3}$; $\max_{-}=-\frac{4\pi}{3}$;

г) $M\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $\min_{+}=\frac{5\pi}{3}$; $\max_{-}=-\frac{\pi}{3}$.

№ 48

а) $y<\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $k\in z$;

б) $y>-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{4}+2\pi k$; $k\in z$;

в) $y>\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $k\in z$;

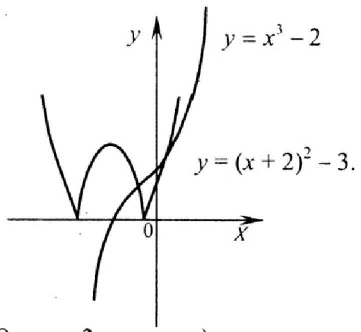
г) $y<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{5\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{7\pi}{4}+2\pi k$; $k\in z$.

№ 46 (а, г)

а) $x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t\in\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right]$; $k\in z$;

г) $x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $t\in\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$; $k\in z$.

6.



(*Ответ*: 3 решения.)

Учитель анализирует самостоятельные работы учащихся, выполнение домашних заданий, выявляет пробелы в знаниях учащихся.

Максимальное количество баллов за урок: 35

<u>МС</u>

Урок 4		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

Систематизировать полученные знания. Подготовка к самостоятельной работе.	Приветствие. Проверка отсутствующих. Мы продолжаем изучение числовых окружностей. Для начала, проверим домашнее задание. **Интеллектуальная игра «Умники и умницы».** В начале урока всем учащимся задаются вопросы. По итогам ответов ученики, набравшие наибольшее количество фишек, состязаются на цветовых дорожках. Три фишки меняются на орден. Вопросы для всех учащихся: 1. М – середина II четверти. Найти дугу МА. 2. М – середина II четверти. Найти дугу ВМ. 3. М – середина II четверти. Найти дугу АД. 4. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{45\pi}{4}\right)$ 5. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{28}{3}\pi\right)$ 6. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{19\pi}{2}\right)$ 7. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{21\pi}{6}\right)$ 8. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{21\pi}{6}\right)$ 9. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{34}{3}\pi\right)$ 10. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$ 11. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{41}{2}\pi\right)$ 12. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{17\pi}{2}\right)$ 13. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{31}{6}\pi\right)$ 14. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{38\pi}{3}\right)$ 15. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{55}{4}\pi\right)$	Присутствие: 1 балл. Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: 2 балла. Учащиеся играют в игру, отвечают на вопросы. Один правильный ответ на общий вопрос: 2 балла. Один правильный ответ на цветной дорожке: 3 балла.

16. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{33\pi}{4}\right)$
17. Найти декартовы координаты точки М$\left(\frac{54}{3}\pi\right)$
18. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$
19. Найти декартовы координаты точки М$\left(-\frac{29}{2}\pi\right)$
20. Найти на числовой окружности точки с данной ординатой ($-\frac{1}{2}$, - 1) и абсциссой ($-\frac{1}{2}$, 0) и записать, каким числам t они соответствуют.
21. Найти на числовой окружности точки с данной ординатой ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$) и абсциссой (1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$) и записать, каким числам t они соответствуют.
22. Найти на числовой окружности точки с данной ординатой ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$) и абсциссой (-1, $\frac{1}{2}$) и записать, каким числам t они соответствуют.
23. Найти на числовой окружности точки с данной ординатой ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$), 0) и абсциссой ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) и записать, каким числам t они соответствуют.

Вопросы для учащихся на цветных дорожках (красной, желтой, зеленой):

1. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству $x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству $y < \frac{1}{2}$.
4. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству $x < -1$.
6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x >

	$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству y < $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству y ≤ – 1. 9. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x > 1. 10. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x > $\frac{1}{2}$. 11. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x ≤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 12. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству y > $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 13. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству y ≤ $-\frac{1}{2}$. 14. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству y ≤ – 1. 15. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x < – 1. 16. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x > $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 17. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству x ≤ $\frac{1}{2}$. 18. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству y < $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 19. Найти на числовой окружности точки с абсциссой	

		или ординатой, удовлетворяющей неравенству $y \geq -\frac{1}{2}$. 20. Найти на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей неравенству $y \geq 1$.	

МКЗ

Урок 4		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, их домашних и самостоятельных работ, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

Урок 4		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	Самостоятельная работа.	Учащиеся выполняют самостоятельную работу. Один правильный ответ: <u>3 балла.</u>
		Максимальное количество баллов за урок: <u>121</u>

А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 1**	А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 2**	А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 3**	А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 4**
1°. Переведите в радианы: а) 16°; б) 150°. **2**°. Выразите в градусах: а) $\frac{7\pi}{15}$; б) $\frac{23\pi}{20}$.	**1**°. Переведите в радианы: а) 24°; б) 153°. **2**°. Выразите в градусах:	**1**°. Переведите в радианы: а) 27°; б) 156°. **2**°. Выразите в градусах:	**1**°. Переведите в радианы: а) 42°; б) 160°. **2**°. Выразите в градусах:

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) 3,2; б) –46 ?

а) $\frac{11\pi}{20}$; б) $\frac{17\pi}{15}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{8\pi}{3}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) –2,5; б) 51 ?

а) $\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{37\pi}{30}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{9\pi}{4}$; б) $-\frac{19\pi}{3}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) –3,9; б) 41 ?

а) $\frac{5\pi}{9}$; б) $\frac{7\pi}{6}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{16\pi}{3}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) 5,9; б) –23 ?

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 5

1°. Переведите в радианы:
а) 40°; б) 162°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{19\pi}{30}$; б) $\frac{13\pi}{10}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{7\pi}{2}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) 4,2; б) –39 ?

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 6

1°. Переведите в радианы:
а) 48°; б) 165°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{17\pi}{30}$; б) $\frac{11\pi}{9}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{14\pi}{3}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) –6,1; б) 24 ?

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 7

1°. Переведите в радианы:
а) 54°; б) 171°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{3\pi}{5}$; б) $\frac{19\pi}{15}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{15\pi}{4}$; б) $-\frac{11\pi}{2}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) 5,8; б) –46 ?

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 8

1°. Переведите в радианы:
а) 63°; б) 174°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{13\pi}{9}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{5\pi}{2}$; б) $-\frac{17\pi}{6}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) –5,2; б) 21 ?

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 9

1°. Переведите в радианы:
а) 72°; б) 186°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{7\pi}{10}$; б) $\frac{17\pi}{12}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{11\pi}{3}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:
а) 3,6; б) –45 ?

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 10

1°. Переведите в радианы:
а) 66°; б) 189°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{27\pi}{20}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{15\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 11

1°. Переведите в радианы:
а) 75°; б) 192°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{13\pi}{20}$; б) $\frac{41\pi}{30}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{17\pi}{6}$; б) $-\frac{9\pi}{2}$.

4. В какой четверти координатной окружности лежит число:

А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 12

1°. Переведите в радианы:
а) 78°; б) 195°.

2°. Выразите в градусах:
а) $\frac{23\pi}{30}$; б) $\frac{29\pi}{20}$.

3. На числовой окружности отметьте точку с координатой:
а) $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$.

	а) 6,1; б) –18 ?	а) –4,3; б) 35 ?	**4**. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) –2,9; б) 32 ?
А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 13**	А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 14**	А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 15**	А-10 Ср-01 **ВАРИАНТ 16**
1°. Переведите в радианы: а) 80°; б) 198° . **2**°. Выразите в градусах: а) $\frac{7\pi}{9}$; б) $\frac{22\pi}{15}$. **3**. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{5\pi}{3}$; б) $-\frac{11\pi}{2}$. **4**. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 4,8; б) –56 ?	**1**°. Переведите в радианы: а) 81°; б) 200° . **2**°. Выразите в градусах: а) $\frac{11\pi}{15}$; б) $\frac{43\pi}{30}$. **3**. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{7\pi}{4}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$. **4**. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 1,4; б) –28 ?	**1**°. Переведите в радианы: а) 99°; б) 204° . **2**°. Выразите в градусах: а) $\frac{4\pi}{15}$; б) $\frac{11\pi}{12}$. **3**. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$. **4**. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 4,3; б) –16 ?	**1**°. Переведите в радианы: а) 84°; б) 207° . **2**°. Выразите в градусах: а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{9\pi}{10}$. **3**. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{19\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$. **4**. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 6,2; б) –24 ?
А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 17	А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 18	А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 19	А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 20
1°. Переведите в радианы: а) 100°; б) 210° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{2\pi}{15}$; б) $\frac{17\pi}{20}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{19\pi}{3}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) –4,5; б) 52 ?	1°. Переведите в радианы: а) 102°; б) 220° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{3\pi}{10}$; б) $\frac{19\pi}{20}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{14\pi}{3}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 1,7; б) –38 ?	1°. Переведите в радианы: а) 105°; б) 222° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{4\pi}{45}$; б) $\frac{5\pi}{6}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{17\pi}{6}$; б) $-\frac{13\pi}{3}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) –4,7; б) 28 ?	1°. Переведите в радианы: а) 108°; б) 228° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{7\pi}{30}$; б) $\frac{8\pi}{9}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{13\pi}{4}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 5,9; б) –31 ?
А-10 Ср-01	А-10 Ср-01	А-10 Ср-01	А-10 Ср-01

ВАРИАНТ 21	ВАРИАНТ 22	ВАРИАНТ 23	ВАРИАНТ 24
1°. Переведите в радианы: а) 114°; б) 234° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{3\pi}{20}$; б) $\frac{13\pi}{15}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{9\pi}{4}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 4,4; б) –22 ?	1°. Переведите в радианы: а) 120°; б) 243° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{5\pi}{12}$; б) $\frac{16\pi}{15}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{11\pi}{6}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) –2,7; б) 37 ?	1°. Переведите в радианы: а) 117°; б) 246° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{9\pi}{20}$; б) $\frac{10\pi}{9}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{9\pi}{2}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 4,4; б) –54 ?	1°. Переведите в радианы: а) 126°; б) 255° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{4\pi}{9}$; б) $\frac{11\pi}{10}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{5\pi}{4}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 3,2; б) –19 ?
А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 25	А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 26	А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 27	А-10 Ср-01 ВАРИАНТ 28
1°. Переведите в радианы: а) 132°; б) 258° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{7\pi}{20}$; б) $\frac{29\pi}{30}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{13\pi}{4}$; б) $-\frac{17\pi}{3}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 4,7; б) –51 ?	1°. Переведите в радианы: а) 135°; б) 260° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{11\pi}{30}$; б) $\frac{21\pi}{20}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{7\pi}{3}$; б) $-\frac{19\pi}{4}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 2,7; б) –44 ?	1°. Переведите в радианы: а) 138°; б) 261° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{13\pi}{30}$; б) $\frac{13\pi}{12}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{11\pi}{6}$; б) $-\frac{15\pi}{4}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) 3,6; б) –25 ?	1°. Переведите в радианы: а) 140°; б) 264° . 2°. Выразите в градусах: а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{31\pi}{30}$. 3. На числовой окружности отметьте точку с координатой: а) $\frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$. 4. В какой четверти координатной окружности лежит число: а) –2,4; б) 53 ?

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2	ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4	ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6	ВАРИАНТ 7
а) $\frac{4\pi}{45}$; б) $\frac{5\pi}{6}$	а) $\frac{2\pi}{15}$; б) $\frac{17\pi}{20}$	а) $\frac{3\pi}{20}$; б) $\frac{13\pi}{15}$	а) $\frac{7\pi}{30}$; б) $\frac{8\pi}{9}$	а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{9\pi}{10}$	а) $\frac{4\pi}{15}$; б) $\frac{11\pi}{12}$	а) $\frac{3\pi}{10}$; б) $\frac{19\pi}{20}$
а) 84°; б) 207°	а) 99°; б) 204°	а) 105°; б) 222°	а) 100°; б) 210°	а) 114°; б) 234°	а) 102°; б) 220°	а) 108°; б) 228°
а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)
а) III; б) III	а) III; б) I	а) II; б) III	а) IV; б) II	а) III; б) IV	а) I; б) IV	а) IV; б) III
ВАРИАНТ 8	ВАРИАНТ 9	ВАРИАНТ 10	ВАРИАНТ 11	ВАРИАНТ 12	ВАРИАНТ 13	ВАРИАНТ 14
а) $\frac{7\pi}{20}$; б) $\frac{29\pi}{30}$	а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{31\pi}{30}$	а) $\frac{11\pi}{30}$; б) $\frac{21\pi}{20}$	а) $\frac{5\pi}{12}$; б) $\frac{16\pi}{15}$	а) $\frac{13\pi}{30}$; б) $\frac{13\pi}{12}$	а) $\frac{4\pi}{9}$; б) $\frac{11\pi}{10}$	а) $\frac{9\pi}{20}$; б) $\frac{10\pi}{9}$
а) 135°; б) 260°	а) 126°; б) 255°	а) 120°; б) 243°	а) 117°; б) 246°	а) 138°; б) 261°	а) 140°; б) 264°	а) 132°; б) 258°
а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)
а) I; б) II	а) III; б) IV	а) IV; б) I	а) II; б) III	а) III; б) I	а) IV; б) I	а) I; б) III
ВАРИАНТ 15	ВАРИАНТ 16	ВАРИАНТ 17	ВАРИАНТ 18	ВАРИАНТ 19	ВАРИАНТ 20	ВАРИАНТ 21

а) $\frac{11\pi}{20}$; б) $\frac{17\pi}{15}$	а) $\frac{7\pi}{15}$; б) $\frac{23\pi}{20}$	а) $\frac{5\pi}{9}$; б) $\frac{7\pi}{6}$	а) $\frac{17\pi}{30}$; б) $\frac{11\pi}{9}$	а) $\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{37\pi}{30}$	а) $\frac{3\pi}{5}$; б) $\frac{19\pi}{15}$	а) $\frac{19\pi}{30}$; б) $\frac{13\pi}{10}$
а) 48°; б) 165°	а) 40°; б) 162°	а) 24°; б) 153°	а) 54°; б) 171°	а) 16°; б) 150°	а) 42°; б) 160°	а) 27°; б) 156°
а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)
а) III; б) II	а) IV; б) I	а) II; б) II	а) II; б) IV	а) II; б) II	а) IV; б) I	а) III; б) II
ВАРИАНТ 22	ВАРИАНТ 23	ВАРИАНТ 24	ВАРИАНТ 25	ВАРИАНТ 26	ВАРИАНТ 27	ВАРИАНТ 28
а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{27\pi}{20}$	а) $\frac{13\pi}{20}$; б) $\frac{41\pi}{30}$	а) $\frac{7\pi}{10}$; б) $\frac{17\pi}{12}$	а) $\frac{11\pi}{15}$; б) $\frac{43\pi}{30}$	а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{13\pi}{9}$	а) $\frac{23\pi}{30}$; б) $\frac{29\pi}{20}$	а) $\frac{7\pi}{9}$; б) $\frac{22\pi}{15}$
а) 75°; б) 192°	а) 81°; б) 200°	а) 80°; б) 198°	а) 63°; б) 174°	а) 66°; б) 189°	а) 78°; б) 195°	а) 72°; б) 186°
а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)	а) б)
а) III; б) IV	а) III; б) II	а) III; б) IV	а) III; б) IV	а) II; б) IV	а) III; б) I	а) III; б) II

Модуль 2
Синус и косинус. Тангенс и котангенс – 3 часа

ПМ

Урок 5		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

<table>
<tr>
<td>Активизация учебной деятельности.
Актуализация опорных знаний.</td>
<td>Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока.
Учитель начинает: «На первом уроке мы говорили о том, как важна тригонометрия и какой широкий у нее спектр применения. Давайте вспомним, где же она применяется».
«Основными в тригонометрии являются определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Поэтому сегодня мы дадим определения этих основополагающих понятий. Для начала решим устно небольшое задание:
Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x=\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.</td>
<td>Учащиеся записывают тему урока.
Присутствие: <u>1 балл.</u>
Учащиеся отвечают, где применяется тригонометрия.

Учащиеся устно решают задание.</td>
</tr>
</table>

<u>ИМ</u>

<table>
<tr>
<th colspan="3">Урок 5</th>
</tr>
<tr>
<th>Дидактические цели</th>
<th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th>
<th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th>
</tr>
<tr>
<td>Обеспечить усвоение знаний по теме «Синус и косинус. Тангенс и котангенс.».
Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление.
Дать определение синуса и косинуса числового аргумента, изучить свойства синуса и косинуса.
Дать определение тангенса и котангенса числового аргумента, закрепить</td>
<td>

§ 4. СИНУС И КОСИНУС

Определение. Если точка M числовой единичной окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют **косинусом числа** t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют **синусом числа** t и обозначают $\sin t$.

Итак (см. рис. 23),

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } M(t)=M(x,y)\text{, то}\\ x=\cos t,\\ y=\sin t.\end{gathered}}$$

Отсюда следует, что

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1.$$

Вооружившись определением, вернемся к § 3 и как бы заново перечитаем его.

Мы отметили в § 3, что каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем для точек:
первой четверти $x>0$, $y>0$;
второй четверти $x<0$, $y>0$;
третьей четверти $x<0$, $y<0$;
четвертой четверти $x>0$, $y<0$ (см. рис. 17).

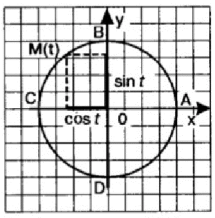


Рис. 23

Это позволяет нам составить таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям окружности (табл. 1).

Таблица 1

Четверть окружности	1-я	2-я	3-я	4-я
cos t	+	−	−	+
sin t	+	+	−	−

Уравнение числовой окружности имеет вид $x^2+y^2=1$. Тем самым фактически получено важное равенство, связывающее $\sin t$ и $\cos t$,

$$\boxed{\cos^2 t+\sin^2 t=1.}$$

Мы говорили в § 3, что нам важно научиться отыскивать координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (рис. 7 и 8). Необходи-

</td>
<td>Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.</td>
</tr>
</table>

изученное в ходе выполнения упражнений.

мость этого стала предельно ясной: опираясь на таблицы из § 3, мы без труда составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$ (табл. 2 и 3):

Таблица 2

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 3

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Пример 1. Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

$$\text{а) } t=\frac{45\pi}{4};\quad \text{б) } t=-\frac{37\pi}{3};\quad \text{в) } t=45\pi;\quad \text{г) } t=-18\pi.$$

Решение. а) При решении примера 1а из § 3 мы установили, что числу $t=\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $t=\frac{5\pi}{4}$ имеем (см. табл. 2) $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$\cos\frac{45\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\frac{45\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) При решении примера 1б из § 3 мы установили, что числу $t=-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $t=\frac{5\pi}{3}$ имеем (см. табл. 3) $\cos t=\frac{1}{2}$, $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит,

	$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=\frac{1}{2};\quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ в) При решении примера 1в из § 3 мы установили, что числу $t=45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Для точки $t=\pi$ имеем (см. табл. 2) $\cos t=-1$, $\sin t=0$. Значит, $$\cos 45\pi=-1;\quad \sin 45\pi=0.$$ г) В примере 1г из § 3 мы установили, что числу $t=-18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Для точки $t=0$ имеем (см. табл. 2) $\cos t=1$, $\sin t=0$. Значит, $$\cos(-18\pi)=1;\quad \sin(-18\pi)=0.$$ **Пример 2**. Решить уравнение $\sin t=\frac{1}{2}$. Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 2 из § 3. *Ответ*: $t=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\quad t=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **Пример 3**. Решить уравнение $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 3 из § 3. *Ответ*: $t=\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\quad t=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$ (или $t=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$). **Пример 4**. Решить неравенство $\sin t>\frac{1}{2}$. Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y>\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 4 из § 3. *Ответ*: $\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi t$. **Пример 5**. Решить неравенство $\cos t>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абс-	

	циссой $x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 6 из § 3. *Ответ*: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. **Пример 6.** Решить уравнения: а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$. Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 23), они соответствуют числам 0 (точка A), π (точка C), 2π (точка A), 3π (точка C), $-\pi$ (точка C), -2π (точка A) и т.д. Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πk. Итак, решение уравнения $\sin t = 0$ имеет вид: $t = \pi k$. б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Итак, решение уравнения $\sin t = 1$ имеет вид: $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу $-\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Итак, решение уравнения $\sin t = -1$ имеет вид: $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. *Ответ*: а) $t = \pi k$; б) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **Пример 7.** Решить уравнения: а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$. Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 23), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2}$ (точка B), $\frac{3\pi}{2}$ (точка D), $\frac{5\pi}{2}$ (точка B), $\frac{7\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{3\pi}{2}$ (точка B) и т.д. Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$. Итак, решение уравнения $\cos t = 0$ имеет вид: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$. б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу 0, а значит, и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т.е. $2\pi k$. Итак, решение уравнения $\cos t = 1$ имеет вид: $t = 2\pi k$.	

в) Абсциссу −1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 23), она соответствует числу π, а значит, и всем числам вида $\pi+2\pi k$.

Итак, решение уравнения $\cos t=-1$ имеет вид: $t=\pi+2\pi k$.

Ответ: а) $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$; б) $t=2\pi k$; в) $t=\pi+2\pi k$.

Замечание. Напомним еще раз о нашей договоренности: параметр k (или n) принимает любые целочисленные значения ($k\in Z$), мы это постоянно подразумеваем, но ради краткости не записываем.

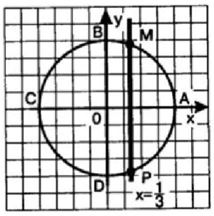


Рис. 24

Пример 8. Решить уравнения:

а) $\cos t=\frac{1}{3}$; б) $\sin t=-0{,}4$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $\frac{1}{3}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу $\frac{1}{3}$ имеют точки M и P (рис. 24), а вот каким числам t они соответствуют, мы сказать пока не можем. К этой проблеме вернемся в гл. 2.

б) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой −0,4 и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату −0,4 имеют точки L и N (рис. 25), а вот каким числам t они соответствуют, мы сказать пока не можем. К этой проблеме также вернемся в гл. 2.

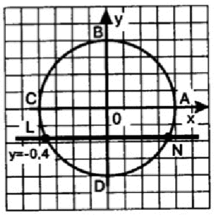


Рис. 25

Пример 9. Какое из двух чисел больше, $\sin 1$ или $\sin 2$?

Решение. Вопрос можно переформулировать так: на числовой окружности отмечены точки 1 и 2. У какой из них ордината больше? В такой геометрической интерпретации задача имеет довольно симпатичное решение. Отметим на числовой окружности точки 1 и 2 (рис. 26). Точка 1 удалена от точки $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (по окружности) примерно на 0,57 (вы помните, что $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$); точка 2 удалена от точки $\frac{\pi}{2}$ (по окружности) примерно на 0,43 $\left(2-\frac{\pi}{2}\approx 2-1{,}57=0{,}43\right)$. Значит, точка 2 находится ближе к точке $\frac{\pi}{2}$, чем точка 1, а потому ее ордината больше.

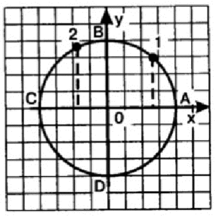


Рис. 26

Ответ: $\sin 1<\sin 2$

Мурмилова Екатерина Сергеевна

Завершая в этом параграфе разговор о синусе и косинусе, получим некоторые важные формулы.

1. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(-t) = -\sin t,\\ \cos(-t) = \cos t.\end{gathered}}$$

Например, $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

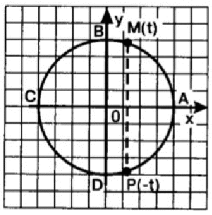


Рис. 27

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (рис. 27), т.е. симметричная точке M относительно оси абсцисс. У таких точек одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У таких точек равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты. А это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$. ●

2. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(t + 2\pi k) = \sin t,\\ \cos(t + 2\pi k) = \cos t.\end{gathered}}$$

Это очевидно, поскольку числам t и $t + 2\pi k$ соответствует одна и та же точка числовой окружности (чем мы не раз уже пользовались).

3. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(t + \pi) = -\sin t,\\ \cos(t + \pi) = -\cos t.\end{gathered}}$$

Например,

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

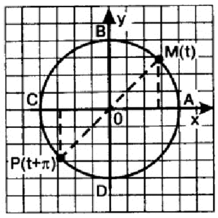


Рис. 28

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t+\pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 28). У таких точек и абсциссы, и ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку. Это значит, что

$$\cos(t+\pi)=-\cos t,$$
$$\sin(t+\pi)=-\sin t.$$

●

Пример 10. Доказать тождества:

а) $\sin(\pi-t)=\sin t$; б) $\cos(\pi-t)=-\cos t$;

в) $\sin(2\pi-t)=-\sin t$; г) $\cos(2\pi-t)=\cos t$.

Решение. а) Запишем $\sin(\pi-t)$ в виде $\sin(-t+\pi)$. Применив к выражению $\sin(-t+\pi)$ свойство 3, получим: $\sin(-t+\pi)=-\sin(-t)$.

По свойству 1 $\sin(-t)=-\sin t$. Значит, $-\sin(-t)=\sin t$, а потому $\sin(-t+\pi)=\sin t$.

Итак, $\sin(\pi-t)=\sin t$, что и требовалось доказать.

б) Запишем $\cos(\pi-t)$ в виде $\cos(-t+\pi)$. Применив к выражению $\cos(-t+\pi)$ свойство 3, получим: $\cos(-t+\pi)=-\cos(-t)$.

По свойству 1 $\cos(-t)=\cos t$. Значит, $\cos(-t+\pi)=-\cos t$, что и требовалось доказать.

в) $\sin(2\pi-t)=\sin(-t+2\pi)=\sin(-t)=-\sin t$.

Итак, $\sin(2\pi-t)=-\sin t$, что и требовалось доказать.

г) $\cos(2\pi-t)=\cos(-t+2\pi)=\cos(-t)=\cos t$.

Итак, $\cos(2\pi-t)=\cos t$, что и требовалось доказать.

4. *Для любого значения t справедливы равенства*

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)&=\cos t,\\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)&=-\sin t.\end{aligned}}$$

Доказательство. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, а числу $t+\frac{\pi}{2}$ — точка P (рис. 29). Сразу обратим внимание на важное обстоятельство: если точка M находится в первой четверти, то точка P — во второй; если точка M находится во второй четверти, то точка P — в третьей и т.д. Дуги AM и BP равны, соответственно равны и прямоугольные треугольники OKM и OLP. Значит, $OK=OL$, $MK=PL$. Из этих равенств и учитывая указанное

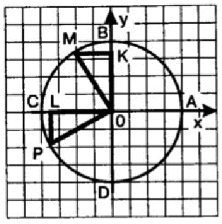


Рис. 29

выше обстоятельство о расположении точек M и P в четвертях числовой окружности, делаем два вывода:

1) ордината точки P и по модулю, и по знаку совпадает с абсциссой точки M. Это значит, что

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;$$

2) абсцисса точки P по модулю равна ординате точки M, но отличается от нее знаком. Это значит, что

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t.$$

Пример 11. Доказать тождества:

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t; \quad \text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t.$$

Решение. Доказательства тождеств аналогичны доказательствам тождеств из примера 10: используются свойства 1 и 4. Мы приводим оба доказательства без комментариев, но советуем вам «озвучить» рассуждения.

$$\text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-t)=\cos t;$$

$$\text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(-t)=\sin t.$$

§ 5. ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС

Определение. Отношение синуса числа t к косинусу этого же числа называют **тангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о $\operatorname{tg} t$, подразумевают, что $\cos t \neq 0$, т.е. что $t \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ (см. пример 7а из § 4), а говоря о $\operatorname{ctg} t$, подразумевают, что $\sin t \neq 0$, т.е. что $t \neq \pi k$ (см. пример 6а из § 4). Поэтому обычно определения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ записывают так:

	$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t},\ \text{где } t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;$$ $$\operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t},\ \text{где } t\neq\pi k.$$ Впредь, говоря о $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$, мы будем подразумевать (а иногда и записывать), что аргумент t принимает только допустимые значения: $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ для $\operatorname{tg} t$ и $t\neq\pi k$ для $\operatorname{ctg} t$. Опираясь на таблицу знаков синуса и косинуса по четвертям числовой окружности, приведенную в § 4, нетрудно составить аналогичную таблицу для тангенса и котангенса: Четверть: 1-я, 2-я, 3-я, 4-я $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$: +, −, +, − **Пример 1.** Вычислить: а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$. Решение. а) Имеем: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$ б) Имеем: $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ (см. второй макет — рис. 8). Значит, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{1}{2}=-\sqrt{3}$. в) Имеем: $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Значит, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0:1=0$. г) Имеем: $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. второй макет — рис. 8). Значит, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\frac{1}{2}=-\sqrt{3}$. ◼ Как видите, зная значения синуса и косинуса числа t, нетрудно вычислить соответствующие значения тангенса и котангенса. Тем не менее есть смысл составить таблицу основных значений тангенса и котангенса:	Учащиеся выполняют задания в тетрадях, объединившись в группы по 4 человека.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tg t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
ctg t	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Завершая разговор о тангенсе и котангенсе, получим две важные формулы.

1. ***Для любого допустимого значения t справедливы равенства:***

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,(-t) = -\,\mathrm{tg}\,t\\ \mathrm{ctg}\,(-t) = -\,\mathrm{ctg}\,t.\end{array}}$$

Доказательство. **Воспользуемся свойством 1 для косинуса и синуса (§ 4): $\cos(-t) = \cos t$, а $\sin(-t) = -\sin t$. Имеем:**

$$\mathrm{tg}\,(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\,\mathrm{tg}\,t;$$

$$\mathrm{ctg}\,(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\,\mathrm{ctg}\,t.$$ ●

2. ***Для любого допустимого значения t справедливы равенства:***

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,(t+\pi) = \mathrm{tg}\,t,\\ \mathrm{ctg}\,(t+\pi) = \mathrm{ctg}\,t.\end{array}}$$

Доказательство. **Воспользуемся свойством 3 для косинуса и синуса (§ 4): $\cos(t+\pi) = -\cos t$, $\sin(t+\pi) = -\sin t$.**

Имеем:

$$\mathrm{tg}\,(t+\pi) = \frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \mathrm{tg}\,t;$$

$$\mathrm{ctg}\,(t+\pi) = \frac{\cos(t+\pi)}{\sin(t+\pi)} = \frac{-\cos t}{-\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \mathrm{ctg}\,t.$$ ●

Выполняются и такие равенства: $\mathrm{tg}(t+2\pi) = \mathrm{tg}\,t$, $\mathrm{tg}(t-\pi) = \mathrm{tg}\,t$, $\mathrm{ctg}\,(t+2\pi) = \mathrm{ctg}\,t$ и вообще:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,(t+\pi k) = \mathrm{tg}\,t,\\ \mathrm{ctg}\,(t+\pi k) = \mathrm{ctg}\,t.\end{array}}$$

Пример 2. Вычислить: а) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

Решение. а) По свойству 1 $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}$. Так как $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, то $-\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3} = -\mathrm{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Мы воспользовались свойством 2, а точнее, его обобщением. Итак,

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

б) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4} = \mathrm{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$. Здесь мы также воспользовались свойством 2. ◙

Выполнение упражнений:

№ 50, 51 (выполнить, используя заранее заготовленные макеты окружности в тетрадях и на доске).

Учащиеся записывают домашнее задание.

№ 55 (а, б)

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$;

б) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$, так как $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

№ 56 (а)

а) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\cdot\sin\frac{\pi}{2}=$

$=-\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+0+1\cdot 1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1$.

№ 57 (а, б)

а) $t=\frac{\pi}{2}$. Найти: $\cos 2t$.

Решение:

$\cos 2t=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1$

(*Ответ*: -1.)

б) $t=-\frac{\pi}{3}$. Найти $\sin\frac{t}{2}$.

Решение:

$\sin\frac{t}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

(*Ответ*: $-\frac{1}{2}$.)

№ 59 (а, б)

а) $2\sin t$, так как $-1\le\sin t\le t$, то $-2\le 2\sin t\le 2$.

Значит, -2 – наименьшее значение выражения, 2 – наибольшее значение выражения.

б) $3+4\cos t$, так как $-1\le\cos t\le 1$, то

$-4\le 4\cos t\le 4$, а $-1\le 4\cos t+3\le 7$

Значит, -1 – наименьшее значения выражения, 7 – наибольшее значение выражения.

№ 60 (а, б) – устно.

№ 60 (в, г)

в) $1+\sin^2 t+\cos^2 t=1+1-\cos^2 t+\cos^2 t=2$;

г) $\sin t-\sin t\cos^2 t=\sin t(1-\cos^2 t)=\sin t\cdot\sin^2 t=\sin^3 t$.

№ 61 (а)

а) $(\sin t-\cos t)^2+2\sin t\cos t=\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t+$

$+2\sin t\cos t=\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

№ 73 (а, б)

а) $\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}=\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t}=\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{1+\cos t}=1-\cos t$;

б) $\sin^4 t+\cos^4 t+2\sin^2 t\cos^2 t=(\sin^2 t+\cos^2 t)^2=1$.

№ 96 (а, г)

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}=1;$

г) $7\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=7.$

№ 97 (а)

$\operatorname{tg}2{,}5\cdot\operatorname{ctg}2{,}5+\cos^2\pi-\sin\frac{2\pi}{8}-\cos\frac{2\pi}{8}=1+1-1=1.$

№ 98 (а, г)

а) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}<0;$

г) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{77}>0.$

№ 99 (б, в)

б) $\frac{\sin t}{\operatorname{tg}t}=\cos t;$

$\sin t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=\cos t.$

в) $\cos t\cdot\operatorname{tg}t=\sin t;$

$\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}=\sin t.$

№ 92 (а, б)

а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}(\pi+\frac{\pi}{4})=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1;$

б) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{ctg}(\pi+\frac{\pi}{3})=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

№ 93 (в, г)

в) $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6})=-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{3};$

г) $\operatorname{ctg}(-\frac{2\pi}{3})=-\operatorname{ctg}(\frac{2\pi}{3})=-\operatorname{ctg}(\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

№ 94 (б, г)

б) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3})\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3};$

г) $\operatorname{tg}(\frac{9\pi}{4})+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4})=\operatorname{tg}(2\pi+\frac{\pi}{4})+1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+1=1+1=2.$

№ 95 (в, г)

в) $2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2};$

г) $2\operatorname{tg}0+8\cos\frac{3\pi}{2}-6\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot0+8\cdot0-6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}.$

№ 101

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1-1}{\cdot2\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}:2=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Домашнее задание:

№ 52, 55 (в, г).

№ 56 (б), 59 (в)

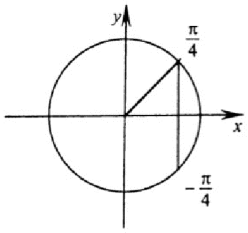
№ 97 (б), 99 (а, г), 100 (б, г).

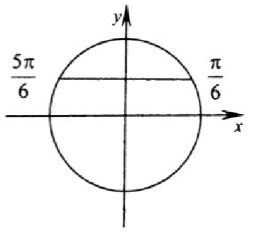
	№ 105, 106.	
		Максимальное количество баллов за урок: 1

РМ

Урок 6		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме «Синус и косинус. Тангенс и котангенс». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач. Выработать у учащихся умения решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.	Приветствие, проверка отсутствующих. Учащиеся решают устно задания: 1. Вычислить $\sin t$ и $\cos t$, если: а) $t=0$; б) $t=\frac{\pi}{4}$; в) $t=\frac{5\pi}{4}$ г) $t=-20\pi$; д) $t=\frac{5\pi}{6}$; е) $t=\frac{7\pi}{4}$. 2. Определить знак числа: $\sin 2$; $\sin 3$; $\cos(-5)$; $\cos 7$. Решение простейших тригонометрических уравнений. $\sin t=0$, $\cos t=0$, $\sin t=\frac{1}{2}$, $\cos t=\frac{1}{2}$, $\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (обязательно с использованием числовой окружности) Повторить определение синуса и косинуса a (a – угол или число). Разобрать таблицу значений sin a и cos a, где $0\leq a\leq 2\pi$. **Выполнение упражнений.** ***№ 63 (а, б)*** а) $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin t=\frac{1}{2}$, $t_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$	Учащиеся записывают тему урока, сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: 2 балла. Присутствие: 1 балл. Учащиеся устно решают задания. Один правильный ответ: 2 балла. Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.

$t = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\qquad$ $t_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$





№ 64 (б, г)

б) $\cos t = \sqrt{3}$, так как $\sqrt{3} > 1$, то уравнение решений не имеет.

г) $\cos t = -\dfrac{\pi}{3}$, так как $\left|-\dfrac{\pi}{3}\right| > 1$, $(\pi \approx 3{,}14)$, то уравнение решений имеет.

№ 67 (в, г)

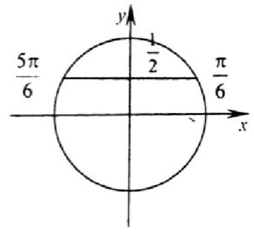
в) $1 - 2\sin t = 0;$

$2\sin t = 1;$

$\sin t = \dfrac{1}{2};$

$t_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

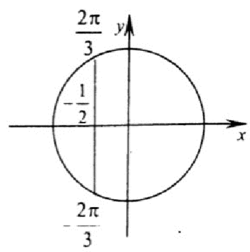
$t_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$



г) $2\cos t + 1 = 0;$

$\cos t = -\dfrac{1}{2};$

$t = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$



№ 74 (а, б)

) $10\sin t = \sqrt{75};$

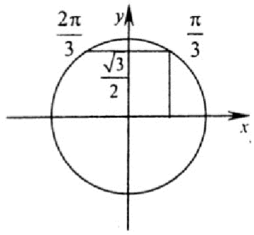
$\sin t = \dfrac{\sqrt{75}}{10};$

$\sin t = \frac{5\sqrt{3}}{10};$

$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$t_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$t_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$



б) $\sqrt{8}\sin t + 2 = 0;$

$\sin t = -\frac{2}{\sqrt{8}};$

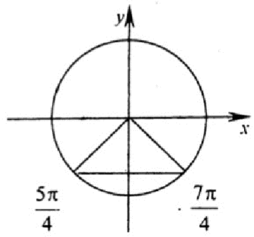
$\sin t = -\frac{2}{\sqrt{2}};$

$\sin t = -\frac{1}{\sqrt{2}};$

$\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$t_1 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$t_2 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$



№ 75 (а, б)

а) $\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} - \sqrt{2}\sin t = 0;$

$1 - \sqrt{2}\sin t = 0;$

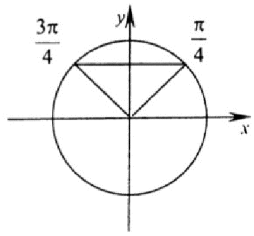
$\sqrt{2}\sin t = 1;$

$\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}};$

$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$t_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$t_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

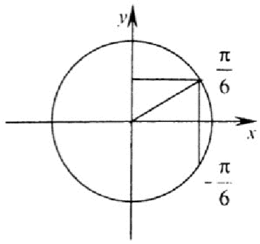


б) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}\cos t = \cos^2 1 + \sin^2 1,$

$\cos t = 1 : \dfrac{2}{\sqrt{3}},$

$\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$t = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$



№ 76 (а)

а) $|\sin t| = 1,$

$\sin t = -1,$

$t = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$\sin t = 1,$

$t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ (или $t = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$).

№ 79

а) $\cos 2 \cdot (2x - 1) < 0.$

Так как $\cos 2 < 0$, то получим: $2x - 1 > 0$, $x > \dfrac{1}{2}$

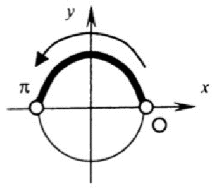
(*Ответ*: $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.)

№ 87 (а)

$\sin t > 0;$

$0 + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k,\ k \in Z;$

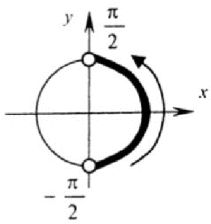
$2\pi k < t < \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$



№ 88 (а)

$\cos t > 0;$

$-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$



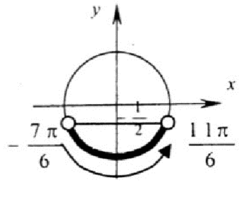
№ 89 (а, б)

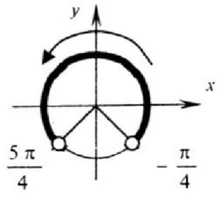
а) $\sin t < -\dfrac{1}{2};$

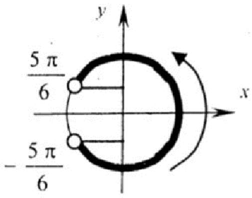
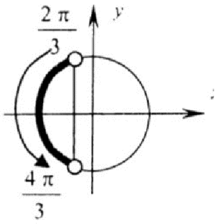
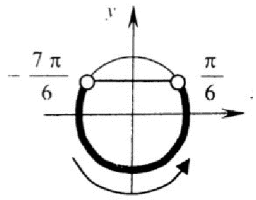
$\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$

б) $\sin t > -\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$





	№ 90 (а, б) а) $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi,\ k \in Z.$ б) $\cos t < -\frac{1}{2}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$   ***№ 91*** а) $\sin t \le \frac{1}{2}$; $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k \le t \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$ 	

<u>МС</u>

Урок 6		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Систематизировать полученные знания. Подготовка к контрольной работе.	***Вариант I*** 1. Решить уравнения: а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\cos t = -\frac{1}{2}$, 2. Упростить выражения: а) $\sin(\pi + t)$; б) $\operatorname{tg} t \cos t$; ***Вариант II*** а) $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\cos t = \frac{1}{2}$. а) $\cos(\pi + t)$; б) $\operatorname{ctg} t \cdot \sin t$. ***Вариант I***: № 102 (а, г), 104 (а, в). ***Вариант II***: № 102 (б, в), 104 (б, г). ***№ 102*** а) $\cos\frac{5\pi}{9} - \operatorname{tg}\frac{25\pi}{18} < 0$; б) $\operatorname{tg} 1 - \cos 2 > 0$;	Учащиеся делятся на две команды, решают задания. Одно правильно решенное задание: <u>3 балла</u>. Команда, набравшая большее количество баллов, назначается победителем.

	в) $\sin\frac{7\pi}{10}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}>0$; г) $\sin 2-\operatorname{ctg} 5{,}5>0$. ***№ 104*** а) $1+\operatorname{tg}^2 t=\cos^{-2} t$; $1+tg^2 t=1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t}=\cos^{-2} t$; б) $1+\operatorname{ctg}^2 t=\sin^{-2} t$ (аналогично); в) $\sin^2 t\,(1+\operatorname{ctg}^2 t)=1$; $\sin^2 t\,(1+\operatorname{ctg}^2 t)=\sin^2 t\,(\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t})=1$; г) $\cos^2 t\,(1+\operatorname{tg}^2 t)=1$ (аналогично). **Домашнее задание:** №64 (а, в), 67 (а, б), 68 (а), 74 (в). № 87 (в), 88 (в), 89 (в, г), 90 (в, г).	Учащиеся записывают домашнее задание.
		Максимальное количество баллов за урок: 36

МКЗ

Урок 7		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	Приветствие, проверка отсутствующих. На основе анализа работы учащихся на уроках, их домашних и самостоятельных работ, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся записывают тему урока, сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: 2 балла. Присутствие: 1 балл. Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

Урок 7		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку		Учащиеся выполняют контрольную работу. Один правильный ответ: 4 балла.

<table>
<tr>
<td>своей деятельности;</td>
<td>

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

(Определение тригонометрических функций)

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sin \frac{7\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg} 13{,}5\pi$.

2. Решите уравнения:

а) $\sin t = \frac{1}{2}$; б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Упростите выражение

$$\operatorname{ctg} t \cdot \sin(-t) + \cos(2\pi - t).$$

4. Докажите тождество

$$\frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \cos^2 t.$$

5. Вычислите

$$2\sin 870^\circ + \sqrt{12} \cdot \cos 570^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ.$$

---

6. Известно, что $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

Вычислите: $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

---

7. Существует ли такое число t, что выполняется равенство

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}?$$

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 **(Определение тригонометрических функций)** **Вариант 2** **1.** Вычислите: а) $\cos \frac{5\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$; б) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(-3{,}5\pi)$. **2.** Решите уравнения: а) $\sin t = -\frac{1}{2}$; б) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** Упростите выражение $\operatorname{tg}(-t) \cdot \cos t - \sin(4\pi - t)$. **4.** Докажите тождество $\operatorname{ctg} t \cdot \sin^2 t = (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^{-1}$. **5.** Вычислите $4\cos 840° - \sqrt{48} \cdot \sin 600° + \operatorname{ctg}^2 30°$. **6.** Известно, что $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите: $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$. **7.** Существует ли такое число t, что выполняется равенство $\cos t = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{10}}$?	

	КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 **(Определение тригонометрических функций)** **Вариант 3** **1.** Вычислите: а) $\sin \frac{9\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$. **2.** Решите уравнения: а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos t = -\frac{1}{2}$. **3.** Упростите выражение $\operatorname{tg} t \cdot \cos(-t) + \sin(\pi + t)$. **4.** Докажите тождество $\frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \sin^2 t$. **5.** Вычислите $4\sin^2 120° - 2\cos 600° + \sqrt{27}\,\operatorname{tg} 660°$. **6.** Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите: $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$. **7.** Существует ли такое число t, что выполняется ра венство $\sin t = \frac{1}{\sqrt{14} - \sqrt{8}}$?	

Мурмилова Екатерина Сергеевна

	КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 **(Определение тригонометрических функций)** **Вариант 4** **1.** Вычислите: а) $\cos \frac{2\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg} \frac{17\pi}{6}$; б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. **2.** Решите уравнения: а) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos t = \frac{1}{2}$. **3.** Упростите выражение $\operatorname{ctg}(-t) \cdot \sin t + \cos(\pi + t)$. **4.** Докажите тождество $\operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t = (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^{-1}$. **5.** Вычислите $4 \sin 690° - 8 \cos^2 210° + \sqrt{27} \operatorname{ctg} 660°$. **6.** Известно, что $\cos t = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите: $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$. **7.** Существует ли такое число t, что выполняется ра- венство $\cos t = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{8}}$?	
		Максимальное количество баллов за урок: 45

Модуль 3
Тригонометрические функции числового аргумента – 1 час

ПМ

Урок 8		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. Учитель начинает: «Какое бы действительное число t мы не взяли, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число sin t с помощью правила. Но с ним мы познакомимся позже. А сейчас, давайте вспомним соответствия, изученные ранее».	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: 1 балл.

	1. Вспомнить некоторые соотношения, изученные раньше: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; $\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin t}{\cos t}$ при $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$; $\operatorname{ctg}^2 t = \frac{\cos t}{\sin t}$ при $t \neq \pi k$; 2. Доказать формулы: $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$ при $t \neq \frac{\pi k}{2}, k \in z$; $1 + \operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$ при $t \neq \frac{\pi k}{2}, k \in z$; $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$ при $t \neq \pi k, k \in z$. **Вывод**: все полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения остальных тригонометрических функций.	Учащиеся решают задание, правильный ответ: 2 балла.

ИМ

Урок 8		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить усвоение знаний по теме «Тригонометрические функции числового аргумента». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Дать определение тригонометрических функций числового аргумента, доказать соотношения между этими функциями.	**Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:** **1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку (1; 0);** **2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;** **3) найти ординату этой точки.** **Эта ордината и есть $\sin t$.** **Фактически речь идет о функции $s = \sin t$, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и т.д.), знаем некоторые ее свойства.** **Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют *тригонометрическими функциями числового аргумента t*.** **Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций, некоторые из этих соотношений вы уже знаете:** $\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$	Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ при } t \ne \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \text{ при } t \ne \pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее tg t и ctg t:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \text{ при } t \ne \frac{\pi k}{2}.}$$

Пример 1. Упростить выражение: а) $1+\operatorname{tg}^2 t$; б) $1+\operatorname{ctg}^2 t$.

Решение. а) Имеем $1+\operatorname{tg}^2 t = 1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1+\operatorname{ctg}^2 t = 1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$. ◼

Мы получили еще две важные формулы:

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ при } t \ne \frac{\pi}{2}+\pi k;}$$

$$\boxed{1+\operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \text{ при } t \ne \pi k.}$$

Все полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения остальных тригонометрических функций.

Пример 2. Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.

По условию $\sin t = \frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos t = \frac{4}{5}$ или $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных решений выбираем первое: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением $1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t = \frac{144}{169}$.

Из последнего уравнения находим, что $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Значит, из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$: $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, значит,

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

РМ

Урок 8		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме ««Тригонометрические функции числового аргумента». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	**III. Решение примеров** ***№ 110 (а, б)*** а) $1-\sin^2 t=\cos^2 t$; б) $\cos^2 t-1=-\sin^2 t$. ***№ 111 (в, г)*** в) $(1-\cos t)(1+\cos t)=1-\cos^2 t=\sin^2 t$; г) $\sin^2 t+2\cos^2 t-1=\sin^2 t+2\cos^2 t-\sin^2 t-\cos^2 t=\cos^2 t$. ***№ 112 (а, б)*** а) $\frac{1}{\cos^2 t}-1=\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\mathrm{tg}^2 t$; б) $\frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}=1$. ***№ 115 (в, г)*** в) $\frac{\sin^4 t-\cos^4 t}{\sin^2 t-\cos^2 t}=\frac{(\sin^2 t-\cos^2 t)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{(\sin^2 t-\cos^2 t)}=1$. ***№ 116 (б, г)*** б) $\sin t=\frac{5}{13}$; $0<t<\frac{\pi}{2}$; $t\in$ I четверти. $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$; $\mathrm{tg}\, t=\frac{5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$; $\mathrm{ctg}\, t=\frac{12}{5}$; г) $\sin t=-0{,}25$, $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$, $t\in$ III четверти; $\cos t=-\sqrt{1-(-0{,}25)^2}==-\sqrt{1-0{,}0625}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$; $\mathrm{tg}\, t=-\frac{0{,}25}{-\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$; $\mathrm{ctg}\, t=\frac{15}{\sqrt{15}}$. ***№ 117 (в)*** в) $\cos t=0{,}6$; $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$, $t\in$ IV четверти.	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.

<table>
<tr><td></td><td>$\sin t = -\sqrt{1-0,36} = -\sqrt{0,64} = -0,8$; $\text{tg}\, t = -\frac{0,8}{0,6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$; $\text{ctg}\, t = -\frac{3}{4}$.
№ 118 (б)
б) $\text{tg}\, t = 2,4$; $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$; $t \in$ III четверти.
$1+\text{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$; $\cos^2 t = \frac{1}{1+\text{tg}^2 t}$; $\cos t = -\sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2 t}}$; $\cos t =$
$= -\sqrt{\frac{1}{1+2,4^2}} = -\sqrt{\frac{1}{6,76}} = -\sqrt{\frac{100}{676}} = -\frac{10}{26} = -\frac{5}{13}$; $\text{ctg}\, t = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$;
$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{15}$.
№ 119 (а)
а) $\text{ctg}\, t = \frac{12}{5}$; $3\pi < 0 < \frac{7\pi}{2}$; $t \in$ III четверти.
$\text{tg}\, t = \frac{5}{12}$; $\sin^2 t = \frac{1}{1+\text{ctg}^2 t}$; $\sin t = -\sqrt{\frac{1}{1+\text{ctg}^2 t}}$;
$\sin t = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{144}{25}}} = \; = -\sqrt{\frac{1}{\frac{169}{25}}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$.
$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$.</td><td></td></tr>
</table>

<u>МС</u>

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 8</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr><td>Систематизировать полученные знания. Подготовка к самостоятельной работе.</td><td>Класс решает № 121.
№ 121 (а)
$\text{ctg} t - \frac{\cos t - 1}{\sin t} = \frac{\cos t \cdot \sin t - \cos t + 1}{\sin t} = \frac{\cos t - \cos t + 1}{\sin t} = \frac{1}{\sin t}$.
а) $(1 - \cos t)(1 + \cos t) = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$;
б) $\sin 30^\circ \text{ctg}\, 30^\circ - \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$;
в) $\cos^2\alpha\, \text{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \text{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
$(1 - \sin 30^\circ)(1 + \sin 30^\circ) + (1 + \cos 30^\circ)(1 - \cos 30^\circ) =$
$= 1 - \sin^2 30^\circ + 1 - \cos^2 30^\circ = 2 - (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) = 2 - 1 = 1$.
Задания для решения по командам.</td><td>Один из учащихся вызывается к доске и доказывает формулы у доски: <u>3 балла</u>.
Учащиеся решают в тетрадях упражнение из учебника.
Учащиеся делятся на две команды, решают упражнения из учебника. Одно правильно решенное задание: <u>3 балла</u>. Команда, набравшая</td></tr>
</table>

	№ 122 (в) $\frac{\cos t}{1+\sin t}+\frac{\cos t}{1-\sin t}=\frac{\cos t(1-\sin t)+\cos t(1+\sin t)}{(1+\sin t)(1-\sin t)}=$ $=\frac{\cos t(1-\sin t+1+\sin t)}{1-\sin^2 t}=\frac{2\cos t}{\cos^2 t}=\frac{2}{\cos t}.$ **№ 123 (а)** $(3\sin t+4\cos t)^2+(4\sin t-3\cos t)^2=9\sin^2 t+24\sin t\cos t+16\cos^2 t+$ $+16\sin^2 t-24\sin t\cos t+9\cos^2 t=25\sin^2 t+25\cos^2 t=25.$ **№ 124 (б)** $\frac{\cos^2 t-\mathrm{ctg}^2 t}{\sin^2 t-\mathrm{tg}^2 t}=\frac{\cos^2 t-\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}{\sin^2 t-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{(\sin^2 t\cos^2 t-\cos^2 t)\cdot\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot(\sin^2 t\cos^2 t-\sin^2 t)}=$ $=\frac{\cos^2 t(\sin^2 t-1)\cdot\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t-1)}=\frac{\cos^2 t\cdot(-\cos^2 t)\cdot\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\sin^2 t\cdot(-\sin^2 t)}=\frac{-\cos^6 t}{-\sin^6 t}=\mathrm{ctg}^6 t.$ **№ 125 (а)** $\frac{\mathrm{tg} t}{\mathrm{tg} t+\mathrm{ctg} t}=\sin^2 t;$ $\frac{\mathrm{tg} t}{\mathrm{tg} t+\mathrm{ctg} t}=\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\cos t}{\sin t}}=\frac{\sin t\cdot\sin t\cdot\cos t}{\cos t(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sin^2 t.$ **№ 126 (б)** $\frac{\sin t+\mathrm{tg} t}{\mathrm{tg} t}=1+\cos t;\ \frac{\sin t+\mathrm{tg} t}{\mathrm{tg} t}=\frac{(\sin t+\frac{\sin t}{\cos t})\cos t}{\sin t}=$ $=\frac{(\sin t\cos t+\sin t)\cos t}{\cos t\cdot\sin t}=\frac{\sin t(1+\cos t)}{\sin t}=1+\cos t.$	большее количество баллов, назначается победителем.

МКЗ

Урок 8		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, их самостоятельной работы, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

Урок 8		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	**II. Самостоятельная работа** Смотри приложение ***Вариант I***: № 121 (в), 122 (а), 126 (в). ***Вариант II***: № 121 (г), 122 (г), 126 (г). ***Ответы и решения:*** ***№ 121 (в, г)*** в) $\cos^2 t - (\operatorname{ctg}^2 t + 1)\cdot\sin^2 t = \cos^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t = -\sin^2 t$; г) $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{-\cos^2 t}{-\sin^2 t} + 1 = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$. ***№ 122 (а, г)*** а) $\frac{\sin t}{1+\cos t} + \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{\sin t(1-\cos t) + \sin t(1+\cos t)}{(1+\cos t)(1-\cos t)} =$ $= \frac{\sin t - \sin t\cos t + \sin t + \sin t\cos t}{1-\cos^2 t} = \frac{2\sin t}{\sin^2 t} = \frac{2}{\sin t}$. г) $\frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 + \operatorname{ctg} t} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t} + 1}{1 + \frac{\cos t}{\sin t}} = \frac{(\sin t + \cos t)\cdot\sin t}{\cos t\cdot(\sin t + \cos t)} = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$. ***№ 126 (в, г)*** в) $\frac{1-\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{1+\sin t}$; $\frac{1-\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{1+\sin t} = \frac{(1-\sin t)(1+\sin t) - \cos^2 t}{\cos t(1+\sin t)} =$ $= \frac{1-\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos t(1+\sin t)} = \frac{0}{\cos t(1+\sin t)} = 0$. г) $\frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{1+\cos t}{\sin t}$; $\frac{\sin t}{1-\cos t} - \frac{1+\cos t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t - (1+\cos t)(1-\cos t)}{\sin t(1-\cos t)} =$ $= \frac{\sin^2 t - 1 + \cos^2 t}{\sin t(1-\cos t)} = \frac{0}{\sin t(1-\cos t)} = 0$. **Домашнее задание:** № 119 (г), 118 (г), 117 (а), 115 (б). № 125 (б, в, г), 123 (б, в, г).	Учащиеся выполняют контрольную работу. Один правильный ответ: <u>4 балла.</u> Учащиеся записывают домашнее задание.
		Максимальное количество баллов за урок: <u>35</u>

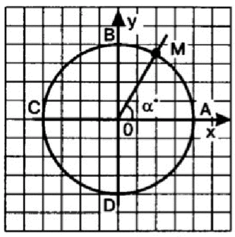
Модуль 4
Тригонометрические функции углового аргумента – 1 час

<u>ПМ</u>

Урок 9		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. Учитель начинает: «Термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс», которые мы ввели выше, на самом деле уже были вам знакомы, правда, использовали вы их до сих пор в другом смысле: в геометрии и физике	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: <u>1 балл.</u> Учащиеся

Повторить изученные ранее единицы измерения угловых величин.	вы рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс угла, (а не числа, как это было в предыдущих параграфах)». Повторить определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса из курса геометрии. «Из геометрии известно, что синус (косинус) острого угла – это отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе, а тангенс (котангенс) угла – это отношение катетов прямоугольного треугольника. Совсем другой подход к понятиям синуса, косинуса, тангенса и котангенса развивали мы в предыдущих параграфах. На самом деле все тесно взаимосвязано, в чем мы сейчас убедимся».	сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: 2 балла. Учащиеся вспоминают определения. Правильный ответ: 2 балла.

ИМ

Урок 9		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить усвоение знаний по теме «Тригонометрические функции углового аргумента». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Ввести понятия радиана, переход от градусной меры к радианной и наоборот.	 Рис. 30 **Возьмем угол с градусной мерой α° и расположим его в модели «числовая окружность в прямоугольной системе координат» так, как показано на рис. 30: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой *M*. Ординату точки *M* естественно считаем синусом угла α°, а абсциссу этой точки — косинусом угла α°.** **Для отыскания синуса или косинуса угла α° совсем необязательно каждый раз проводить подобные построения. Достаточно заметить, что дуга *AM* составляет такую же часть длины единичной окружности, какую угол α° составляет от угла 360°. Если длину дуги *AM* обозначить буквой *t*, то получим $\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}=\frac{t}{2\pi}$, откуда находим:** $t=\frac{2\pi\alpha^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\alpha}{180}.$ **Таким образом,** $\sin\alpha^\circ=\sin t=\sin\frac{\pi\alpha}{180};\quad \cos\alpha^\circ=\cos t=\cos\frac{\pi\alpha}{180}.$ **Например,** $\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi\cdot 30}{180}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$ $\cos 90^\circ=\cos\frac{\pi\cdot 90}{180}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$ **Говорят, что 30° — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{6}$ — *радианная мера* того же угла: $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ *рад*. Аналогично $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ *рад*. Вообще,** $\alpha^\circ=\frac{\pi\alpha}{180}$ *рад*. **В частности,** $\boxed{1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ рад.}}$	Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

Отсюда, в свою очередь, получаем $\boxed{1\ рад = \frac{180°}{\pi}}$.

Например, $35° = \frac{\pi}{180} \cdot 35 = \frac{7\pi}{36}\ рад$; $\frac{2\pi}{3}\ рад = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120°$.

Ради краткости условимся обозначение *рад* опускать, т.е. вполне допустимой является, например, следующая запись:

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180} \cdot 45\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Так что же такое 1 радиан? Вы знаете, что есть различные меры длины: сантиметры, метры, ярды и т.д. Есть и различные меры величины угла. Мы рассматриваем центральные углы единичной окружности. Угол в 1° — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть окружности. **Угол в 1 радиан** — это центральный угол, опирающийся на дугу длиной 1, т.е. *на дугу, длина которой равна радиусу окружности.* Из формулы $1\ рад = \frac{180°}{\pi}$ получаем, что $\boxed{1\ рад \approx 57{,}3°}$.

Говоря о функции $s = \sin t$ (или о любой другой тригонометрической функции), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как это было в предыдущих параграфах, но можем считать ее и мерой угла, т.е. угловым аргументом. Рассматривая ту или иную тригонометрическую функцию, в определенном смысле безразлично считать ее функцией числового или углового аргумента. Мы будем в основном говорить о функциях числового аргумента.

Завершая параграф, убедимся в том, что определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, которые вы изучали в геометрии, представляют собой частные случаи тех определений, что были предложены в этой главе.

Теорема. ***Если а и b — катеты, с — гипотенуза прямоугольного треугольника АВС*** (рис. 31)***, то выполняются следующие равенства:***

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg} A = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

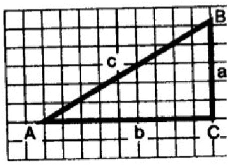


Рис. 31

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рис. 32: вершину A поместим в центр O окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс. Точку пересечения гипотенузы AB с окружностью

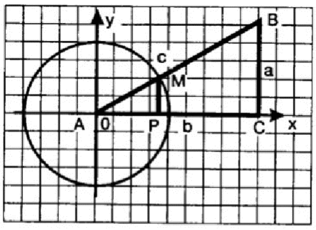


Рис. 32

обозначим буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т.е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтем также, что $AM = 1$ (радиус числовой окружности равен 1) и что $Ae = -$, $AC = b$, $BC = a$.

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ находим: $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ находим: $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; аналогично $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$. ●

Обратимся еще раз к рис. 31 и 32. Как мы только что доказали, $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$. Точно так же можно доказать, что $\sin B = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$.

Значит, $\sin B = \cos A$, $\cos B = \sin A$. Но $B = 90° - A$. Таким образом, получаем известные вам из геометрии соотношения:

$$\sin(90° - A) = \cos A, \quad \cos(90° - A) = \sin A.$$

Переведя эти соотношения на «язык радианов», получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$$

Эти формулы были доказаны выше, в примере 11 из § 4.

Справедливы и аналогичные формулы для тангенса и котангенса (попробуйте выполнить соответствующие обоснования самостоятельно):

$$\operatorname{tg}(90° - A) = \operatorname{ctg} A; \quad \operatorname{ctg}(90° - A) = \operatorname{tg} A;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t.$$

РМ

Урок 9		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме ««Тригонометрические функции углового аргумента». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	***№ 135 (б, г)*** а) $120° = \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$; б) $220° = \frac{\pi}{180} \cdot 220 = \frac{22\pi}{18} = \frac{11\pi}{9}$; в) $300° = \frac{\pi}{180} \cdot 300 = \frac{30\pi}{18} = \frac{5\pi}{3}$; г) $765° = \frac{\pi}{180} \cdot 765 = \frac{\pi \cdot 765}{180} = \frac{17\pi}{4}$. ***№ 138 (а–г)*** а) $\frac{5\pi}{8} = \frac{180 \cdot 5}{8} = 112,5°$; б) $\frac{7\pi}{12} = 7 \cdot \frac{180}{12} = 105°$; в) $\frac{11\pi}{12} = \frac{11 \cdot 180}{12} = 165°$; г) $\frac{47\pi}{9} = \frac{47 \cdot 180}{9} = 940°$. ***№ 144 (устно)*** а) $x = 2\ \mathrm{tg}\ \alpha$; б) $x = 4\cos\alpha$; в) $x = \frac{3}{\cos\alpha}$; $x = \mathrm{ctg}\ \alpha$. ***№ 145*** а) $x = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$; б) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; . в) $x = \frac{2}{\sin 60} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{x}{2} = \cos 60 = \frac{1}{2} x = 1$.	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.

МС

Урок 9		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

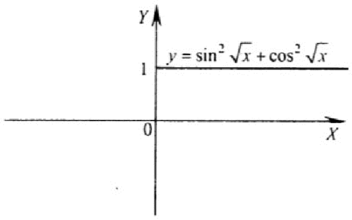
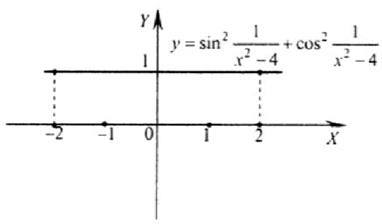
Систематизировать полученные знания. Подготовка к самостоятельной работе.	**Математический диктант** 1. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза С и острый угол α°. Найдите катеты, площадь треугольника и радиус описанной окружности: а) $C = 12$, $\alpha = 60°$, $a = C\cos\alpha = 12\cos 60° = 12\cdot\frac{1}{2} = 6$; $ab = = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$; $R = \frac{C}{2} = \frac{12}{2} = 6$; б) $C = 6$, $\alpha = 45°$; $a = 6\cdot\cos 450° = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; $b = 6\sin 45° = 3\sqrt{2}$; $S = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = 9$; $R = \frac{6}{2} = 3$; в) $C = 6$, $\alpha = 30°$, $a = 4\cos 30° = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$; $b = 4\sin 30° = 4\frac{1}{2} = 2$; $S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $R = \frac{4}{2} = 2$. 2. Расположите в порядке возрастания числа. а) 1, sin 1, cos 1, tg 1 – cos 1, sin 1, 1, tg 1; б) 2, sin 2, cos 2, ctg 2 – ctg 2, cos 2, sin 2, 2. 3. Определите знак выражения. а) $\sin 1\cdot\cos 2\cdot \mathrm{tg} 3\cdot \mathrm{ctg} 4 > 0$, так как $\sin 1 > 0$, $\cos 2 < 0$, $\mathrm{tg}\, 3 < 0$, $\mathrm{ctg}\, 4 > 0$; б) $\sin(-5)\cdot\cos(-6)\cdot\mathrm{tg}(-7)\cdot\mathrm{ctg}(-8) < 0$, так как $\sin(-5) > 0$, $\cos(-6) > 0$, $\mathrm{tg}(-7) < 0$, $\mathrm{ctg}(-8) > 0$.	Учащиеся выполняют задания математического диктанта, затем выполняют самопроверку.

МКЗ

Урок 9		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, их ответов на математический диктант, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

Урок 9		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	***№ 109 (б)*** $\frac{\text{tg } 7\cdot\cos 1}{\sin 1}(2x^2-72)<0$, так как $\frac{\text{tg } 7\cdot\cos 1}{\sin 1}>0$, то $(2x^2-72)<0$, $2x^2-72<0$. $x^2<36$, $\lvert x\rvert<6$, $x\in(-6;-6)$. (*Ответ*: (– 6; – 6).) ***№ 127 (а)*** $\frac{(\sin t+\cos t)^2-1}{\text{ctg}t-\sin t\cos t}=2\text{tg}^2t$; $\frac{(\sin t+\cos t)^2-1}{\text{ctg}t-\sin t\cos t}=2\text{tg}^2t=$ $=\frac{\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t-1}{\frac{\cos t}{\sin t}-\sin t\cos t}=\frac{2\sin t\cos t\cdot\sin t}{\cos t-\sin^2 t\cos t}=\frac{2\sin^2 t\cos t}{\cos t(1-\sin^2 t)}=$ $=\frac{2\sin^2 t\cos t}{\cos t\cdot\cos^2 t}=2tg^2t$. ***№ 128 (а)*** $\sin(4\pi+t)=\frac{3}{5}$, $0<t<\frac{\pi}{2}$. Вычислить: $\text{tg}(\pi-t)$. $\sin(4\pi+t)=\sin t=3/5$; $\cos t=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$; $\text{tg}t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{3}{4}$; $\text{tg}(-t)=-\frac{3}{4}$; $\text{tg}(\pi-t)=-\frac{3}{4}$. (*Ответ*: $-\frac{3}{4}$.) ***№ 132*** Дано: $\sin t\cos t=-0{,}5$. Вычислить: $\sin^4 t+\cos^4 t$. Решение: $\sin^4 t+\cos^4 t=1-2\sin^2 t+\cos^2 t=1-2\cdot\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. ***№ 133*** $\text{tg}t-\frac{1}{\text{tg}t}=-\frac{7}{12}$, так как $0<t<\frac{\pi}{2}$, то $\text{tg } t\neq 0$. $12\text{ tg}^2t+7\text{ tg } t-12=0$, $D=49+576=625$. $\text{tg}t=-7\pm\frac{25}{24}$; $\text{tg}t=-\frac{32}{24}=-\frac{3}{4}$ – не подходит, так как $\text{tg } t>0$; $\text{tg}t=-7\pm\frac{25}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$; $\text{tg } t=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos t=\frac{4}{5}$, $\sin t=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$; $\sin t+\cos t=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$. (*Ответ*: $\frac{7}{5}$.) ***№ 134 (в, г)*** в) $y=\sin^2\sqrt{x}+\cos^2 t\sqrt{x}=1$. $x\geq 0$.  г) $y=\sin^2\frac{1}{x^2-4}+\cos^2\frac{1}{x^2-4}=1$, $x^2-4\neq 0$; $x\neq\pm 2$.  **Домашнее задание:** № 137, 140.	Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: <u>4 балла.</u> Учащиеся записывают домашнее

	№ 134 (а, б), 131, 130 (б).	задание.
		Максимальное количество баллов за урок: <u>39</u>

Модуль 5
Формулы приведения – 2 часа

<u>ПМ</u>

Урок 10		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. **Устные упражнения** 1. Определите знак (+ или –) sin 120°, sin 240°, sin 310° sin (– 30°); cos 110°, cos 225°, cos 300°, cos (– 60°), tg 145°, tg 135°, tg 200°, ctg (– 50°). 2. Переведите в градусную меру: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}$. 3. Переведите в радианную меру 30°, 180°, 90°, 60°, 45°. 4. Назовите значение sin, cos, tg, ctg для 0°, 90°, 180°, 270°. Учитель начинает: «Некоторые тригонометрические выражения можно упростить, делают это с помощью формул приведения. И сегодня мы с вами познакомимся с ними».	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: <u>1 балл.</u> Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: <u>2 балла.</u> Учащиеся устно выполняют задания. Правильный ответ: <u>1 балл</u>.

<u>ИМ</u>

Урок 10		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

Обеспечить усвоение знаний по теме «Формулы приведения». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Познакомить с формулами приведения.	Если под знаком тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2}+t, \frac{\pi}{2}-t, \pi+t, \pi-t, \frac{3\pi}{2}+t, \frac{3\pi}{2}-t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где n — произвольное целое число, то, оказывается, такое выражение всегда можно привести к более простому виду, когда под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент t. Соответствующие формулы обычно называют *формулами приведения*. Некоторые из этих формул мы вывели, например, в § 4, говоря о свойствах синуса и косинуса, а именно: $\sin(\pi+t)=-\sin t$; $\cos(\pi+t)=-\cos t$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$. В том же параграфе в примере 10 получили: $\sin(\pi-t)=\sin t$; $\cos(\pi-t)=-\cos t$; $\sin(2\pi-t)=-\sin t$; $\cos(2\pi-t)=\cos t$. Как видите, в этих случаях удалось привести заданное тригонометрическое выражение к виду $\sin t$ или $\cos t$ (с точностью до знака). В § 5 мы вывели две формулы приведения для тангенса и котангенса: $\operatorname{tg}(\pi+t)=\operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(\pi+t)=\operatorname{ctg} t$. Итак, мы имеем 10 формул приведения. Попробуем их проанализировать. Во-первых, замечаем, что наименование преобразуемой функции после приведения к функции аргумента t может сохраниться, а может и измениться: синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс. Приведем примеры: $\sin(\pi+t)=-\sin t$; $\cos(\pi+t)=-\cos t$; $\operatorname{ctg}(\pi+t)=\operatorname{ctg} t$; $\cos(2\pi-t)=\cos t$. Здесь название тригонометрической функции сохранилось.	_Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t.$$

Здесь название тригонометрической функции изменилось.

Во-вторых, замечаем, что перед полученным выражением иногда появляется знак минус.

Формул приведения очень много. Выводить их каждый раз довольно утомительно. Составить таблицу формул приведения и постоянно ею пользоваться можно, но неудобно, так как она громоздка. На наше счастье, был придуман простой и удобный способ их запоминания. Он заключается в том, что:

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi+t, \pi-t, 2\pi+t$ или $2\pi-t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2}+t, \frac{\pi}{2}-t, \frac{3\pi}{2}+t$ или $\frac{3\pi}{2}-t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (на родственное);

3) перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0<t<\frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т.е. когда под знаком тригонометрической функции содержится сумма вида $90°+\alpha$, $90°-\alpha$, $180°+\alpha$ и т.д.

Попробуем применить сформулированное правило сначала к уже перечисленным в этом параграфе формулам приведения.

Преобразуем $\sin(\pi+t)$. Наименование функции сохраняется, т.е. получаем $\sin t$. Далее, если считать, что $0<t<\frac{\pi}{2}$, то $\pi+t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\sin(\pi+t)=-\sin t$.

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$. Наименование функции изменяется, т.е. получаем $\sin t$. Далее, из того, что $0<t<\frac{\pi}{2}$, следует, что $\frac{\pi}{2}+t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$.

А теперь воспользуемся сформулированным правилом для получения пары новых формул приведения.

Преобразуем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$. Наименование функции следует изменить; получим $\operatorname{tg} t$. Далее, если считать, что $0<t<\frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2}-t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак плюс. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360°-\alpha)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$); получим $\sin\alpha$. Далее, если считать, что $0<\alpha<90°$, получим, что $360°-\alpha$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед полученной функцией. Таким образом, $\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)=\operatorname{tg} t$; значит, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-5t\right)=\operatorname{tg} 5t$, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и т.д.

РМ

Урок 10		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме ««Формулы приведения». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	Устно № 151–154 («по цепочке» с подробным объяснением). ***№ 151*** а) $\sin(\frac{\pi}{2}+t)=\cos t$. Название функции меняем; $(\frac{\pi}{2}+t)$ – угол II четв., $\sin t$ в II четв. ⊕. г) $\sin(\pi+t)=-\sin t$ Название формулы не меняем; $(\pi+t)$ – угол III четв., $\sin t$ в III в. ⊖. ***№ 154*** в) $\operatorname{tg}(270°+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(360+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$. ***№ 155*** а) $\sin 240°=\sin(180°+60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin 240°=$ $=\sin(270°-30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} 315°=\operatorname{ctg}(270°+45°)=-\operatorname{tg} 45°=-1$ или $\operatorname{ctg} 315°=$ $=\operatorname{ctg}(360°-45°)=-\operatorname{ctg} 45°=-1$. ***№ 156*** а) $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$; г) $\cos(-\frac{7\pi}{3})=\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. ***№ 157*** а) $\cos 630°-\sin 1470°-\operatorname{ctg} 1125°=\cos 270°-\sin(360°\cdot 4+30°)-$ $-\operatorname{ctg} 45°=0-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}$; г) $\cos(-9\pi)+2\sin(-\frac{49\pi}{6})-\operatorname{ctg}(-\frac{21\pi}{4})=\cos 9\pi-2\sin\frac{49\pi}{6}+$ $+\operatorname{ctg}(\pi+\frac{\pi}{4})=1-2\cdot\frac{1}{2}+1=-1$. ***№ 162 (б)*** $\frac{\sin^2\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-t)}{\operatorname{tg}^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)}=\cos t$; $\frac{\cos^2 t\cdot\cos t}{\operatorname{ctg}^2 t\cdot\sin^2 t}=\cos t$; $\frac{\cos^3 t}{\frac{\text{os}^2 t}{\text{in}^2 t}\cdot\sin^2 t}=\cos t$. ***165 (г)*** $3\sin(\frac{\pi}{2}+t)-\cos(2\pi+t)=1$; $3\cos t-\cos t=1$; $2\cos t=1$; $\cos t=\frac{1}{2}$; $=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. ***167 (б)*** $\sin^2(\pi+t)+\cos^2(2\pi-t)=1$; $\sin^2 t+\cos^2 t=1$; $t\in R$. **Домашнее задание:**	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека. Учащиеся

	№162 (а), 165 (а, б, в), 166 (б), 167 (а).	записывают домашнее задание.
		Максимальное количество баллов за урок: <u>15</u>

<u>МС</u>

Урок 11		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Систематизировать полученные знания. Подготовка к самостоятельной работе.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. Дидактическая игра “Снежный ком” (работа в группах). Выполненные задания оформляются на доске. **1 группа.** Приведите к тригонометрической функции угла из промежутка . а) cos 0.7 = cos(0.5 π + 0.2 π) = - sin 0.2 π cos 0.7 π = cos(π -0.3 π) = -cos 0,3 π. б) ctg $\left(-\frac{3}{5}\pi\right)=-ctg\left(\pi-\frac{2}{5}\pi\right)=ctg\frac{2}{5}\pi$ в) sin 1,6 π = sin(2 π-0,4 π) = - sin 0,4 π. г) tg $\left(-\frac{9\pi}{5}\right)=-tg\left(\pi+\frac{4\pi}{5}\right)=-tg\frac{4\pi}{5.}$. **2 группа.** Приведите к тригонометрической функции угла от 0° до 90°: а) tg137°= tg (90° = 47°) = - ctg 47° = - tg 43°. б) sin (-178°) =- sin (180° - 2°) =-sin2° = - cos 78°. в) sin 680° = sin (720° - 40°) = - 40°. г) cos (-1000°) = cos (1080° - 80°) = cos 80°. **3 группа.** Найдите значение выражения: а) sin 240° = sin (180°+60°)= - sin 60є = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: <u>1 балл.</u> Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: <u>2 балла.</u> Учащиеся выполняют задания игры.

	в) tg 300° = tg (360° - 60°) = - tg 60є = - $\sqrt{3}$. д) ctg (- 225°) = - ctg (180° +45°) = - ctg 45° = -1. **4 группа.** Упростите выражения: а) sin $\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ б) cos ($\alpha+\pi$) = cos (π- α) = - cos α. в) ctg (α -360°) = - ctg (360°- α) = ctg α . г) tg (- α + 270°) = tg (270° - α) = ctg α . **5 группа.** Преобразуйте выражение: а) $\frac{\cos(-\alpha)\cos(180^\circ+\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ+\alpha)}=$ $\frac{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{-\sin\alpha(+\cos\alpha)}=+ctg\alpha$. б) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi-\alpha)\cos(\alpha-\pi)}=\frac{-\sin\alpha\cos\beta}{-tg\alpha\cdot(-\cos\alpha)}=-\frac{si}{}$. Происходит смена составов групп. Ученики собираются в группы, в соответствии своему порядковому номеру. Каждый участник группы рассказывает своим товарищам задание, которые они разбирали в предыдущей группе. В результате у каждого ученика должно быть выполнено по 5 заданий.	

МКЗ

Урок 11		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, их ответов на математической игре, домашних работ учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

Урок 11		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению**

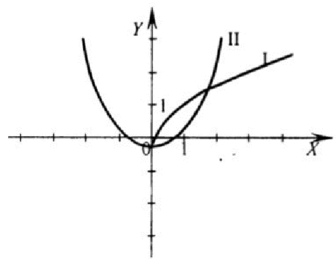
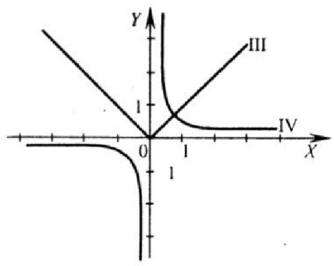
		заданий, оценка
Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	**Самостоятельная работа** ***Вариант I***: № 158 а; 159 а, в; 160 а; 161 а; 163 а; 164 а; 165 а. ***Вариант II***: 158 б; 159 б, г; 160 б; 161 б; 163 б; 164 б; 166 б. ***Ответы и решения:*** ***Вариант I.*** ***Вариант II*** ***№ 158*** а) $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+$ $+\text{tg}(270^\circ+\alpha)+\text{ctg}(360^\circ+\alpha)=$ $=\cos\alpha+(-\cos\alpha)-\text{ctg}\,\alpha+$ $+\text{ctg}\,\alpha=0.$ б) $\sin(\frac{\pi}{2}+t)-\cos(\pi-t)+$ $+\text{tg}(\pi-t)+\text{ctg}(\frac{5\pi}{2}-t)=$ $=\cos t+\cos t+(-\text{tg}\,t)+$ $+\text{tg}\,t=2\cos t.$ ***№ 159*** а) $\frac{\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90+\alpha)}=$ $=\frac{-\cos\alpha\cos\alpha}{-\sin\alpha\cos\alpha}=\text{ctg}\alpha;$ б) $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\text{ctg}\,(-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)\cdot\text{tg}(180^\circ+\alpha)}=$ $=\frac{-\sin\alpha(-\text{ctg}\,\alpha)}{\cos\alpha\cdot\text{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\text{ctg}\alpha$ в) $\frac{\sin(\pi-t)\cdot\cos(2\pi-t)}{\text{tg}(\pi-t)\cdot\cos(\pi-t)}=$ $=\frac{\sin t\cdot\cos t}{-\text{tg}t\cdot(-\cos t)}=\cos t;$ г) $\frac{\sin(\pi+t)\cdot\sin(2\pi+t)}{\text{tg}(\pi+t)\cos(\frac{3\pi}{2}+t)}=$ $=\frac{-\sin t\cdot\sin t}{\text{tg}t\cdot(+\sin t)}=-\cos t.$ ***№ 160*** а) $\frac{\cos(\pi-t)+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin(2\pi-t)-\sin(\frac{3\pi}{2}-t)}=$ $\frac{-\cos t+\sin t}{-\sin t+\cos t}=-1;$ б) $\frac{\sin^2(\pi+t)\sin^2(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin(\pi-t)}\text{tg}(\pi-t)=$ $\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t}\cdot(-\text{tg}t)=$ $=\frac{1}{\sin t}\cdot(-\frac{\sin t}{\cos t})=-\frac{1}{\cos t}.$ ***№ 161*** а) $\frac{\text{tg}(\pi-t)}{\cos(\pi+t)}\cdot\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+t)}{\text{tg}(\frac{3\pi}{2}+t)}=\text{tg}^2t;$ $\frac{-\text{tg}t}{-\cos t}\cdot\frac{(-\cos t)}{(-\text{ctg}t)}=\text{tg}^2t;$ $\text{tg}\,t\cdot\text{tg}\,t=\text{tg}^2t.$ б) $\frac{\sin(\pi-t)}{\text{tg}(\pi+t)}\cdot\frac{\text{ctg}(\frac{\pi}{2}-t)}{\text{tg}(\frac{\pi}{2}+t)}\cdot\frac{\cos(2\pi-t)}{\sin(-t)}=\sin t;$ $\frac{\sin t}{\text{tg}t}\cdot\frac{\text{tg}t}{(-\text{ctg}t)}\cdot\frac{\cos t}{-\sin t}=\sin t;$ $\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}=\sin t.$	Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: 4 балла.

	№ 163 (а, б) **Вариант I** а) $\frac{11\cos 287^\circ - 25\sin 557^\circ}{\sin 17^\circ} = \frac{11\cos(270^\circ + 17^\circ) - 25\sin(3\cdot 180^\circ + 17^\circ)}{\sin 17^\circ} = \frac{11\sin 17^\circ + 25\sin 17^\circ}{\sin 17^\circ} = 36.$ **Вариант II** б) $\frac{13\sin 469^\circ - 8\cos 341^\circ}{\cos 19^\circ} = \frac{13\sin(450^\circ + 19^\circ) - 8\cos(360^\circ - 19^\circ)}{\cos 19^\circ} = \frac{13\cos 19^\circ - 8\cos 19^\circ}{\cos 19^\circ} = 5.$ **№ 164 (а, б)** **Вариант I** а) $\frac{2\cos\frac{11\pi}{5} + 8\sin\frac{13\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5} + 8\sin(\frac{15\pi}{10} - \frac{2\pi}{10})}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5} + 8(-\cos\frac{\pi}{5})}{\cos\frac{\pi}{5}} = -6.$ **Вариант II** б) $\frac{5\sin\frac{5\pi}{7} + 2\cos\frac{25\pi}{14}}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{5\sin(\frac{7\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}) + 2\cos(\frac{21\pi}{14} + \frac{4\pi}{14})}{\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{5\sin\frac{2\pi}{7} + \left(+2\sin\frac{2\pi}{7}\right)}{\sin\frac{2\pi}{7}} = 7.$ **№ 165 (а)** а) $2\cos(2\pi + t) + \sin(\frac{\pi}{2} + t) = 3$ $2\cos t + \cos t = 3$ $3\cos t = 3$ $\cos t = 1$ $t = 2\pi k;$ **№ 166 (б)** б) $\sin(2\pi + t) - \cos(\frac{\pi}{2} - t) + \sin(\pi - t) = 1$ $\sin t - \sin t + \sin t = 1$ $\sin t = 1$ $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$	
		Максимальное количество баллов за урок: 37

Мурмилова Екатерина Сергеевна

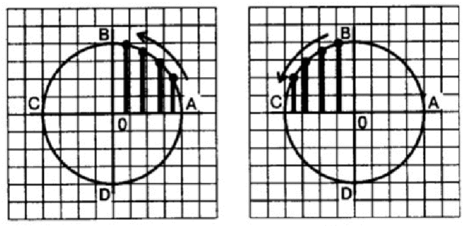
Модуль 6
Функция y = sin x, ее свойства и график – 2 часа

ПМ

Урок 12		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. **Устная работа.** 1. Выполнение № 168, 169, 171. 2. Назовите формулы, которые задали графики. (На доске чертеж, справа формулы.)  а) $y = \|x\|$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^2$; г) $y = \frac{1}{x}$; 3. Назовите координаты вершин параболы $y = (x - 2)^2 + 3$. 4. Назовите промежутки возрастания, убывания функций (III и IV), точки *min*, *max*.	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: 1 балл. Учащиеся устно выполняют задания. Правильный ответ: 1 балл.

ИМ

Урок 12		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить усвоение знаний по теме «Функция y = sin x, ее свойства и график». Способствовать развитию пространственного	**Свойства функции $s = \sin t$** **Свойство 1.** *Область определения — множество R действительных чисел:* $D(f) = (-\infty, +\infty)$. **Свойство 2.** $s = \sin t$ — *нечетная функция.* Напомним (см. наш учебник "Алгебра-9"), что функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.	Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Изучить функцию y = sin x, научить строить график этой функции.	Но в § 4 мы уже доказали, что для любого t выполняется равенство $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $s = \sin t$ — нечетная функция. График функции $s = \sin t$, как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат tOs. **Свойство 3.** *Функция $s = \sin t$ возрастает на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.* Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности (от 0 до $\frac{\pi}{2}$) ордината постепенно увеличивается (от 0 до 1 — см. рис. 33*а*), а при движении точки по второй четверти числовой окружности (от $\frac{\pi}{2}$ до π) ордината постепенно уменьшается (от 1 до 0 — см. рис. 33*б*). Рассуждая аналогично, можно сделать общий вывод: *функция $s = \sin t$ возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$*, где $k \in Z$.  *а* *б* Рис. 33 **Свойство 4.** *Функция $s = \sin t$ ограничена и снизу, и сверху.* Напомним (см. наш учебник "Алгебра-9"), что функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу**, если все значения функции не меньше некоторого числа; иными словами, если существует число m такое, что для любого значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \geqslant m$. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху**, если все значения функции не больше некоторого числа; иными словами, если существует число M такое,	

что для любого значения x из области определения функции выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

Если функция ограничена и снизу, и сверху, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность функции $s = \sin t$ следует из того, что, как мы видели выше, для любого t справедливо неравенство $-1 \leq \sin t \leq 1$.

Свойство 5. $s_{\text{наим.}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$); $s_{\text{наиб.}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

Под $s_{\text{наим.}}$ и $s_{\text{наиб.}}$ понимаются соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $s = \sin t$.

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Но (внимание!) вместо $s = \sin t$ будем писать $y = \sin x$ — ведь нам привычнее запись $y = f(x)$, а не $s = f(t)$. Значит, и строить график будем в привычной системе координат xOy.

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: на оси ординат 1 см $= 1$, т.е. в ваших тетрадях в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки; на оси x 1 см (две клеточки) равен $\frac{\pi}{3}$. Фактически мы будем считать, что $\pi = 3$, что не совсем соответствует действительности (на самом деле $\pi > 3$), но на это при построении графика особого внимания обращать не будем.

Составим таблицу значений функции $y = \sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой, идущей «в гору» на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и «под гору» на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Это — график функции $y = \sin x$ на отрезке

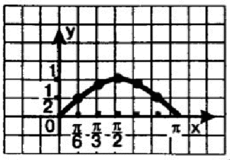


Рис. 34

$[0, \pi]$ (рис. 34). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°. Почему это так, пока объяснить мы не можем, соответствующий разговор пойдет в главе 4.

Добавив к построенному графику симметричную линию относительно начала координат, получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 35).

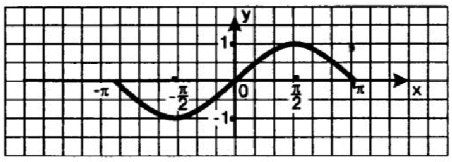


Рис. 35

А теперь построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[\pi, 3\pi]$. Обратите внимание: если $x \in [-\pi, \pi]$, то $(x + 2\pi) \in [\pi, 3\pi]$. Но $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Это означает, что в точке $x + 2\pi$ функция $y = \sin x$ принимает то же значение, что и в точке x. Иными словами, на отрезке $[\pi, 3\pi]$ график функции $y = \sin x$ выглядит точно так же, как и на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 36). И на отрезках $[3\pi, 5\pi]$, $[5\pi, 7\pi]$, $[-3\pi, -\pi]$ и т.д. график этой функции выглядит так же, как на отрезке $[-\pi, \pi]$. Окончательный вид графика функции $y = \sin x$ представлен на рис. 37.

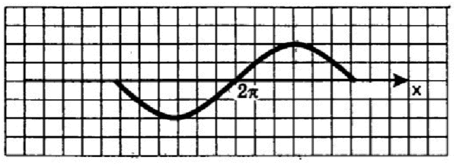


Рис. 36

Линию, служащую графиком функции $y = \sin x$, называют *синусоидой*. Ту часть синусоиды, которая изображена на рис. 35 или 36, называют *волной синусоиды*, а ту часть синусоиды, которая изображена на рис. 34, называют *полуволной* или *аркой синусоиды*.

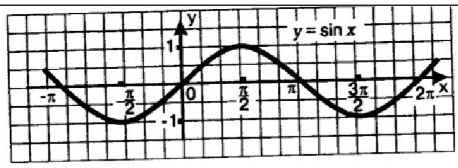


Рис. 37

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции $y = \sin x$.

Свойство 6. $y = \sin x$ — *непрерывная функция.*

Непрерывность функции на промежутке X означает, что график функции на промежутке X — сплошной, т.е. не имеет проколов и скачков. Это, конечно, весьма поверхностное представление о свойстве непрерывности функции, более точное истолкование непрерывности функции мы рассмотрим в главе 4.

Свойство 7. *Область значений функции — отрезок* $[-1, 1]$; короче $E(f) = [-1, 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = x - \pi$.

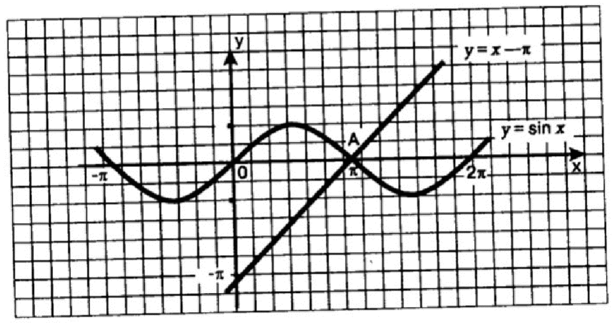


Рис. 38

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

2) Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 38).

3) Построим график линейной функции $y = x - \pi$. Это — прямая линия, проходящая через точки $(0; -\pi)$ и $(\pi;\ 0)$ (рис. 38).

4) Построенные графики пересекаются в точке $A(\pi; 0)$. Значит, заданное уравнение имеет корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = \pi$.

Пример 2. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Решение. Построим вспомогательную систему координат (соответствующие оси $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 2$ проведены на рис. 39 пунктиром) с началом в точке

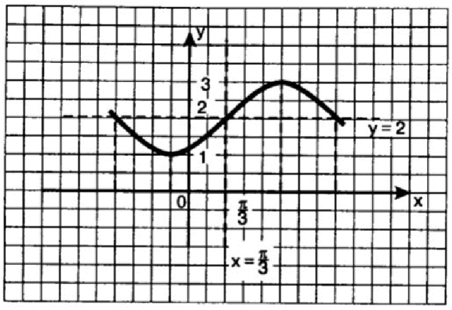


Рис. 39

$\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$. «Привяжем» функцию $y = \sin x$ к новой системе координат — это и будет требуемый график (рис. 39).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$.

Решение. Построив график функции $y = \sin x$ и выбрав часть его на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$, убеждаемся (рис. 40), что $y_{наиб.} = \frac{1}{2}$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{5\pi}{6}$), а $y_{наим.} = -1$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{3\pi}{2}$).

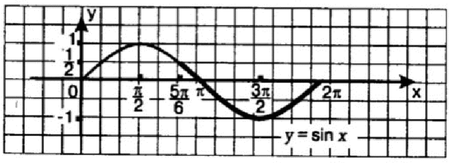
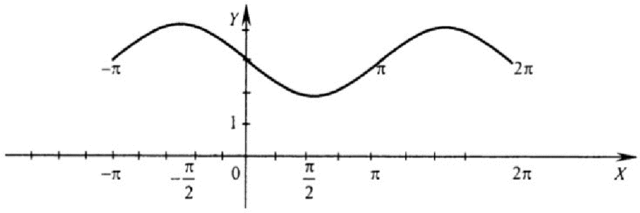
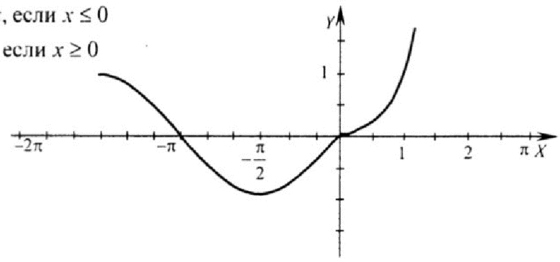


Рис. 40

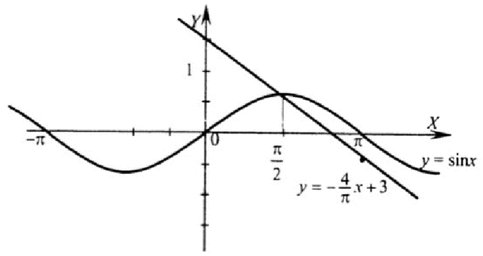
Ответ: $y_{наиб.} = \frac{1}{2}$, $y_{наим.} = -1$.

РМ

Урок 12		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме «Функция y = sin x, ее свойства и график». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	***№ 177 (б)*** Построить график функции $y = -\sin x + 3$.  1) строим вспомогательную систему координат с началом (0; 3); 2) строим в новой системе график $y = \sin x$; 3) строим график симметрично относительно оси OX. ***№ 178 (б)*** $\begin{cases} y = \sin x, \text{ если } x \le 0 \\ y = x^2, \text{ если } x \ge 0 \end{cases}$  	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.

<table>
<tr><td></td><td>

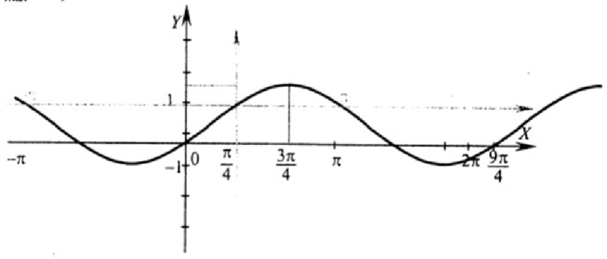
№ 182 (б)



№ 187 (б)

$y_{min} = -0{,}5$

$y_{max} = 1{,}5$



№ 189 (г)

$f(x) = x^3 - \sin x;\ f(x) = (-x)^3 - \sin(-x) = -x^3 + \sin x \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow$
$f(x)$ – нечетная.

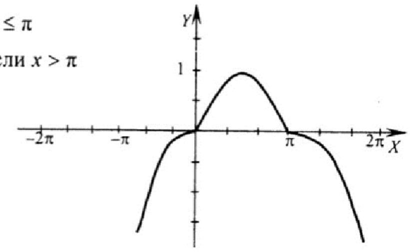
№ 190

$f(x) = 2x^2 - x + 1;$

$f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) - \sin x + 1 = 3 - 2\cos^2 x - \sin x.$

№ 193

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ -(x-\pi)^2, & \text{если } x > \pi \end{cases}$$



Домашнее задание:
№ 175 (в, г), 181 (в, г), 184 (а, г).

</td><td>Учащиеся записывают домашнее задание.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Максимальное количество баллов за урок: <u>5</u></td></tr>
</table>

<u>МС</u>

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 13</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr><td>Систематизировать полученные знания. Подготовка к самостоятельной работе.</td><td>Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока.</td><td>Учащиеся записывают тему урока.
Присутствие: <u>1 балл.</u>
Учащиеся сдают тетради с домашним</td></tr>
</table>

	Проверочная работа. Для учащихся группы А: **Вариант №1** 1. Постройте график функции $y=\sin x-1$; 2. Укажите область значений данной функции; 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на интервале $\left(\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)$ **Вариант №2** 1. Постройте график функции $y=\sin x+0,5$; 2. Укажите область значений данной функции; 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{6};\pi\right)$ Для учащихся группы Б: **Вариант №3** 1. Постройте график функции $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2$; 2. Укажите область значений данной функции; 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$ **Вариант №4** 1. Постройте график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1,5$; 2. Укажите область значений данной функции; 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)$	заданием, правильный ответ: 2 балла. Учащиеся выполняют задания проверочной работы.

МКЗ

Урок 13		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, их ответов на проверочной работе учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 13</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr><td>Осуществить контроль усвоения материала учащимися.
Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;</td><td>

Самостоятельная работа

Уровень I

Вариант I: 174 а, г; 175 а; 176 а; 178 а; 179.

Вариант II: 174 б, в; 175 б; 176 б; 178 б; 180.

Уровень II

Вариант I: 185 а, г; 186 а, в; 192; 188 а, г.

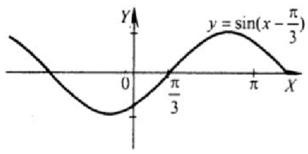
Вариант II: 185 в, б; 186 б, г; 194; 188 б, в.

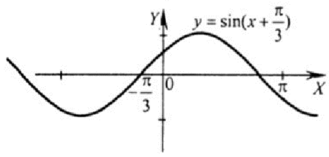
Ответы и решения:

Уровень I

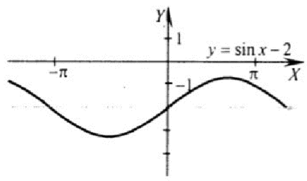
Вариант I

№ 174 (а, г)



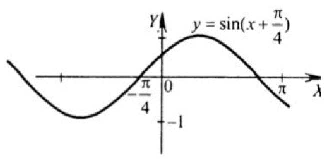


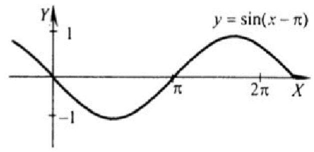
№ 175 (а)



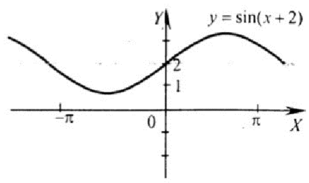
Вариант II

№ 174 (б, в)



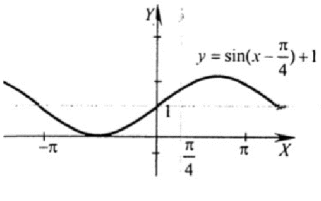


№ 175 (б)

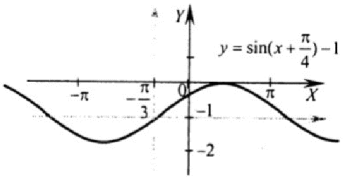


</td><td>Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: <u>4 балла.</u></td></tr>
</table>

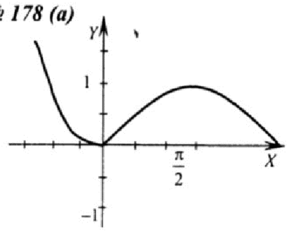
№ 176 (а)



№ 176 (б)

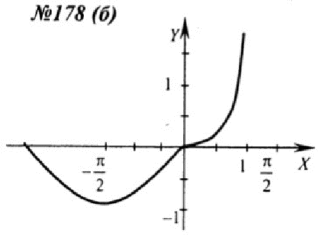


№ 178 (а)



$$y = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \\ x^2, & x \le 0 \end{cases}$$

№178 (б)



$$y = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

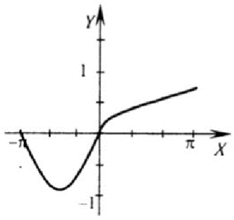
№ 179

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

а) $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$;

б) $f(0) = 0$;

в) $f(\pi^2) = \pi$.



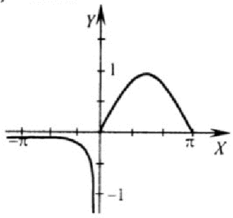
№ 180

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

а) $f(-2) = -\frac{1}{2}$;

$f(0) = 0$;

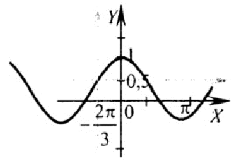
$f(1) = \sin 1$.

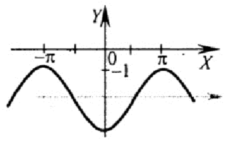


Уровень II

Вариант I

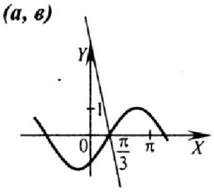
№ 185 (а, г)





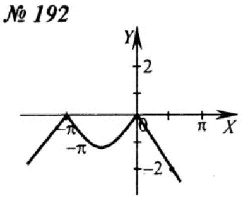
$y = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2.$

№ 186 (а, в)



$x = \frac{\pi}{3}.$

№ 192



$$y = \begin{cases} 2x + 2\pi, & x \le -\pi \\ \sin x, & -\pi < x \le 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$$

а) $f(-\pi - 2) = 4;$

б) $f(-\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6};$

в) $f(2) = -4.$

№ 188 (а, г)

а) $f(x) = x^5 \cdot \sin\frac{x}{2};$

$f(-x) = (-x)^5 \cdot \sin\frac{(-x)}{2} = 5 \cdot \sin\frac{x}{2};$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ – четная.

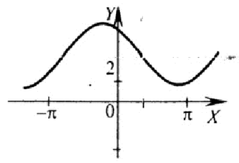
г) $f(x) = \sin^2 x - x^4;$

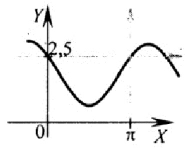
$f(-x) = \sin^2(-x) - (-x)^4 = \sin^2 x - x^4$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ – четная.

Вариант II

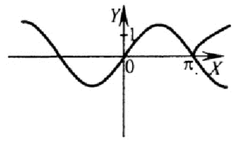
№ 185 (б, в)





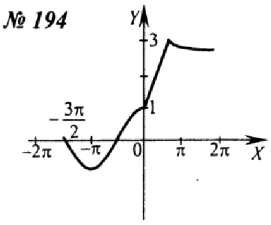
$y = -\sin(x - \frac{\pi}{6}) + 2.$

№ 186 (б, г)



$x = \pi.$

№ 194



$$y = \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{2}), & -\frac{3\pi}{2} \le x \le 0 \\ x + 1, & 0 < x < 2 \\ -\sqrt{2 - x}, & x \ge 2 \end{cases}$$

$f(0) = 1;$

$f(6) = 1;$

$f(-\pi - 2)$ – не существует.

№ 188 (б, в)

б) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1};$

$f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1};$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ – четная.

в) $f(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3};$

$f(-x) = \frac{2\sin(-\frac{x}{2})}{(-x)^3} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3};$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ – четная.

Максимальное количество баллов за урок: 27

Модуль 7

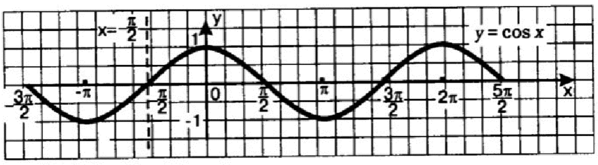
Функция y = cos x, ее свойства и график – 2 часа

ПМ

Урок 14		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. **Устная работа.** 1. Дана функция $f(x) = \cos x$, найдите: а) $f(\frac{\pi}{2}) = 0$; б) $f(-\frac{2\pi}{3}) = 0$; а) $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $f(-\pi) = 0$. 2. Найдите значение функции: а) $y = 2\sin x + \cos x$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{6}$; $(f(x) = -2)$; $\left(f(x) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. б) $y = \frac{1}{\cos x}$; $x = -\frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{11\pi}{6}$; $(f(x) = -2)$; $\left(f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. 3. Не выполняя построения графика, ответьте на вопрос: «Принадлежит ли графику функции $y = \cos x$ точка с координатами»? а) $(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2})$; б) $(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$; а) $(\frac{5}{6}; \frac{1}{2})$ б) $(\frac{2\pi}{3}; -\frac{1}{2})$. Построить график функций: $y = \sin(x - \frac{\pi}{6}) - 2$ $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: 1 балл. Учащиеся устно выполняют задания. Правильный ответ: 1 балл.

ИМ

Урок 14		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

Обеспечить усвоение знаний по теме «Функция y = cos x, ее свойства и график». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Изучить функцию y = cos x, научить строить график этой функции.	Разговор о функции $y = \cos x$ можно было бы построить по той же схеме, которая была использована для функции $y = \sin x$ (§ 9). Но мы выберем путь, быстрее приводящий к цели: воспользуемся формулой приведения $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Что дает нам эта формула? Она позволяет утверждать, что функции $y = \cos x$ и $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ тождественны, значит, их графики совпадают. Построим график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Для этого построим вспомогательную систему координат с началом в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ — пунктирная прямая $x = -\frac{\pi}{2}$ проведена на рис. 41. «Привяжем» функцию $y = \sin x$ к новой системе координат — это и будет график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. график функции $y = \cos x$ (рис. 41).  Рис. 41 График функции $y = \cos x$, как и график функции $y = \sin x$, называют синусоидой (что вполне естественно). **Свойства функции $y = \cos x$** **Свойство 1.** $D(f) = (-\infty, +\infty)$. **Свойство 2.** $y = \cos x$ — *четная функция*. Напомним, что функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Четность функции $y = \cos x$ следует из выведенной в § 4 формулы $\cos(-t) = \cos t$; четность функции иллюстрирует график на рис. 42 — он симметричен относительно оси y.	_Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

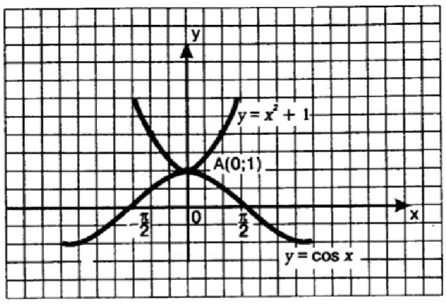


Рис. 42

Свойство 3. ***Функция убывает на отрезке*** $[0, \pi]$, ***возрастает на отрезке*** $[\pi, 2\pi]$ **и т.д.**

Свойство 4. ***Функция ограничена и снизу, и сверху.***

Свойство 5. $y_{наим.} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = \pi + 2\pi k$); $y_{наиб.} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = 2\pi k$).

Свойство 6. $y = \cos x$ — ***непрерывная функция.***

Свойство 7. $E(f) = [-1, 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Решение.

1) Рассмотрим две функции: $y = \cos x$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 42).

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это — парабола (рис. 42).

4) Построенные графики имеют одну общую точку $A(0; 1)$. Значит, заданное уравнение имеет один корень 0 — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x \leq 0; \\ \cos x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим график функции $y = \sin x$ и выделим его часть (рис. 43*а*) на луче $(-\infty, 0]$. Затем построим график функции $y = \cos x$ и выделим его часть (рис. 43*б*) на открытом луче $(0, +\infty)$. Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 44).

Перечислим свойства функции $y = f(x)$, т.е. прочитаем график:

1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;

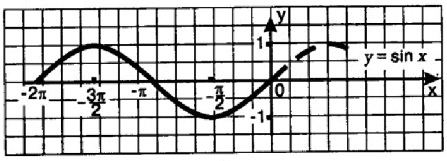
2) функция ни четна, ни нечетна;

3) функция ограничена и снизу, и сверху;

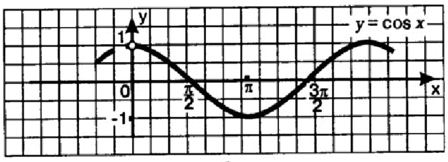
4) $y_{наим.} = -1$ (таких точек бесконечно много), $y_{наиб.} = 1$ (таких точек тоже бесконечно много);

5) функция претерпевает разрыв в точке $x = 0$;

6) $E(f) = [-1, 1]$.



а



б

Рис. 43

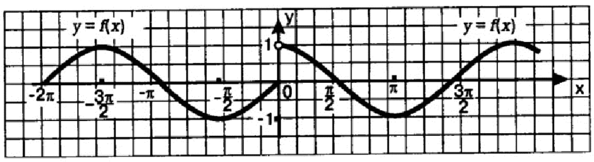
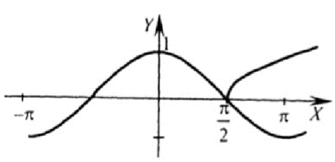
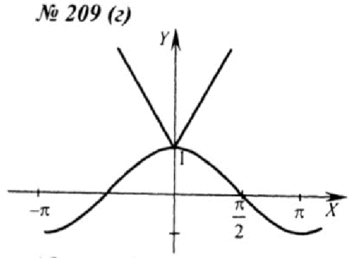
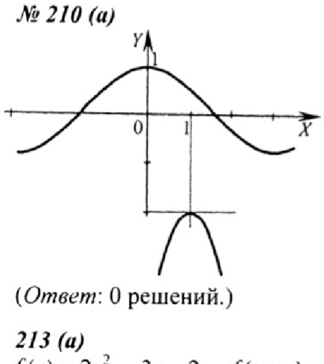
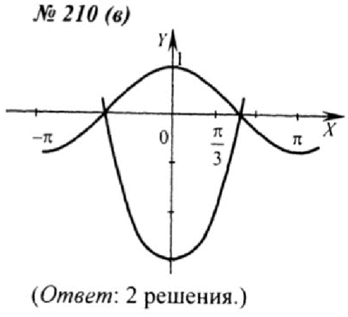


Рис. 44

Вы, наверное, обратили внимание на то, что мы пропустили один пункт чтения графика: ничего не сказали о монотонности функции. Дело в том, что функция бесконечно много раз меняет характер монотонности (то возрастает, то убывает) — это хорошо видно из графика.

РМ

Урок 14		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить формирование умений по теме «Функция y = cos x, ее свойства и график». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	***№ 207 (г)*** $y = \begin{cases} -\cos x, \text{ если } x < 0; \\ 2x^2 - 1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ ***№ 211 (г)*** $f(x) = (4 + \cos x)(\sin^6 x - 1);$ $f(x) = (4 + \cos(-x))(\sin^6(-x) - 1);$ $f(x) = (4 + \cos x)(\sin^6 x - 1) \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ – четная. ***№ 212 (г)*** $f(x) = x^{11} \cdot \cos x + \sin x;$ $f(x) = (-x)^{11} \cdot \cos(-x) + \sin(-x) = -x^{11} \cdot \cos x - \sin x;$ $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ – нечетная. ***№ 209 (б)***  (*Ответ*: $\frac{\pi}{2}$.) ***№ 209 (г)***  (*Ответ*: 0.) ***№ 210 (а)***  (*Ответ*: 0 решений.) ***№ 210 (в)***  (*Ответ*: 2 решения.) ***213 (а)*** $f(x) = 2x^2. - 3x - 2; -f(\cos x) =$ $= -(2\cos x^2 - 3\cos x - 2) =$ $= -2(1 - \sin^2 x) + + 3\cos x + 2) =$ $= -2 + 2\sin^2 x + 3\cos x +$ $+ 2 = 2\sin^2 x + 3\cos x.$ ***213 (б)*** $f(x) = 5x^2 + x + 4;$ $f(\cos x) = 5\cos x^2 + \cos x + 4 =$ $= 5(1 - \sin^2 x) + \cos x + 4 =$ $= -5 - 5\sin^2 x + \cos x + 4 =$ $= 9 - 5\sin^2 x + + \cos x.$	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.
		Максимальное количество баллов за урок: 5

МК

Мурмилова Екатерина Сергеевна

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 15</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr>
<td>Осуществить контроль усвоения материала учащимися.
Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;</td>
<td>Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока.
Решение задач по теме: «Функция y = sinx, y = cosx» по методике взаимообмена задачами.

АЛГОРИТМ РАБОТЫ ПО МЕТОДИКЕ ВЗАИМООБМЕНА ЗАДАНИЯМИ

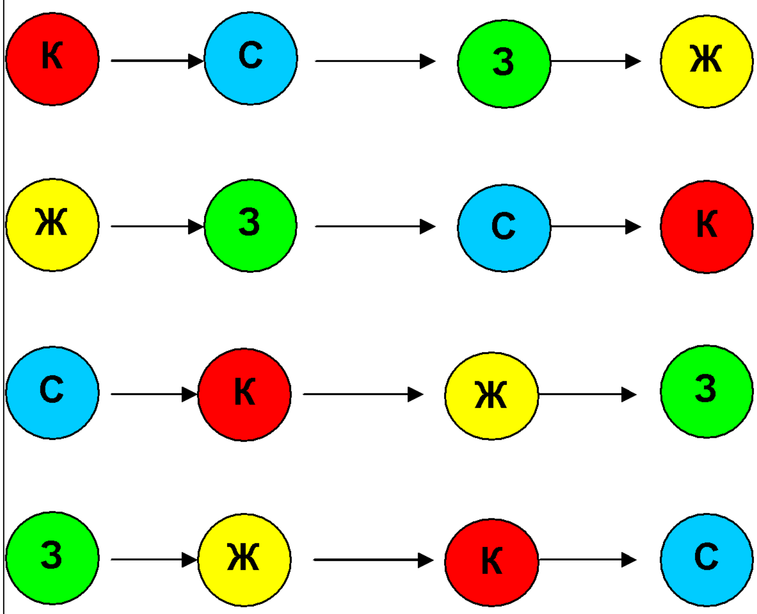
1. Возьмите карточку любого цвета и поставьте точку на листке учета против своей фамилии.
2. Выполните первое задание.
3. Выполните второе задание. Проверьте себя, сможете ли вы записать все, что необходимо, и рассказать товарищу по первой части своей карточки, и в листке учета исправьте точку на +, т.е. готов к обмену знаний.
4. Найдите по цветовому сигналу партнера.
5. Объясните ему первое задание, делая (при необходимости) запись в тетрадь с одновременным проговариванием.
6. Ответьте на вопросы одноклассника и задайте ему контрольные вопросы. Ваша цель - научить своего партнера!
7. Выслушайте товарища по первой части его карточки, при необходимости дав ему свою тетрадь.
8. Поменяйтесь карточками и каждый выполняйте второе задание новой для вас карточки самостоятельно.
9. Сверьте второе задание. Если оно выполнено одинаково, то поблагодарите друг друга и найдите нового партнера. Если неодинаково, то найдите ошибку или обратитесь за помощью к учителю.
10. В листке учета + обведите кружком для той карточки, которую передали партнеру, и поставьте + на той, которую получили от него.
11. Работайте с полученной карточкой с шага 2. Если хотите что-то доделать в карточке, то начинайте работать с шага 4, т.е. сразу находите партнера.
12. За каждое задание ставьте отметку себе сами и ваш партнер должен поставить вам отметку в листок учета.
Желаю удачи!!!

ЛИСТОК УЧЕТА
Группы
<table>
<tr><td rowspan="5">отметка</td><td></td><td colspan="2">Красный</td><td colspan="2">Желтый</td><td colspan="2">Зеленый</td><td colspan="2">Синий</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Моя</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Партнера</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Учащиеся записывают тему урока.
Присутствие: 1 балл.
Учащиеся выполняют задания проверочной работы.
Правильный ответ: 4 балла.</td>
</tr>
</table>

	Учи теля								

ИТОГОВАЯ ОЦЕНКА

Схема маршрута ученика



К

1 группа

1. Построить график функции:

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

2. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ |x| + y = 0 \end{cases}$$

Ж

1группа

1. Решите графически уравнение:

$$\sin x = -\frac{4}{\pi} + 3$$

2. Постройте и прочитайте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x, \text{ если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

З

1 группа

1. Построить график функции:

$y = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

$y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 0{,}5$

на промежутке $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right)$

С

1 группа

1. Постройте и прочитайте график функции:

$f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \le 0 \\ \frac{1}{x}, \text{ если } x > 0 \end{cases}$

2. Решите графически уравнение:

$\sin x = x - \sqrt{x - \pi} = 0$

С

2группа

1. Построить график функции:

$y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

$y = \cos x$

на луче $\left[-\frac{\pi}{6};+\infty\right)$

З

2 группа

1. Построить график функции:

$y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$

2. Докажите, что функция f(x) = x2sinx, является нечетно

Ж

2 группа

1. Построить график функции:

y = cosx – 2

2. Найти значение функции $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, при $x = \frac{3\pi}{2}$

К

2 группа

1. Решите графически уравнение:

$\cos x = \frac{\pi}{2} - x$

2. Постройте график функции:

y = sinx + 1

2 группа доп. задание

1. Докажите, что функция является четной:

$f(x) = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции:

y = sinx

на полуинтервале $\left(-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$

К

3 группа

1. Построить график функции:

y = sinx + 1

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

y = sinx

	на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right]$ **Ж** 3 группа 1. Построить график функции: $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ 2. Решите графически уравнение: $\sin x + x = 0$ **С** 3 группа 1. Построить график функции: $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 2. Найти значение функции $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$, при $x = \frac{4\pi}{3}$ **З** 3 группа 1. Построить график функции: $y = \cos x - 2$ 2. Принадлежит ли графику функции: $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 2$, точка $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{3}{2}\right)$ 3 группа доп. задание 1. Постройте и прочитайте график функции:	

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & \text{если } -\frac{3\pi}{2} \le x \le 0 \\ x + 1, & \text{если } 0 < x < 2 \\ -\sqrt{x-2} + 3, & \text{если } x \ge 2 \end{cases}$$

2. Решите графически уравнение:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + 1$$

З

4 группа

1. Построить график функции:

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

К

4 группа

1. Построить график функции:

$y = -\cos x + 2$

2. Решите графически уравнение:

$\sin x + x = 0$

Ж

4 группа

1. Построить график функции:

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$

С

4 группа

1. Дана функция y = f(x), где:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } -\pi \le x \le 0\\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0\end{cases}$$

а) Вычислите f(– π), f(0), f(1);

б) Постройте график функции y = f(x);

в) Прочитайте график функции y = f(x);

2. Не выполняя построения, ответьте на вопрос, принадлежит ли графику функции y = cosx, точка с координатами $\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)$

4 группа доп. задание

1. Построить график функции:

$$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$$

2. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases}y=\sin x\\ |x|-y=0\end{cases}$$

Ж

5 группа

1. Постройте график функции:

$$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

2. Решите графически уравнение:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\pi+3x$$

К

5 группа

1. Постройте график функции:

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$$

2. Докажите, что функция нечетная:

$$f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$$

З

5 группа

1. Постройте и прочитайте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } \pi \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0 \end{cases}$$

2. Решите графически уравнение:

$$\cos x = \frac{2\pi}{3} x$$

С

5 группа

1. Построить график функции:

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 1$$

на промежутке [0; π]

5 группа доп. задание

1. Докажите, что данная функция является нечетной:
f(x) = x3sinx2

2. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ |x| - y = 0 \end{cases}$$

З

6 группа

1. Постройте график функции:
$y = -\cos(x + \pi) - 1$

2. Решите графически уравнение:

	$\sin x = -2\pi + 2x$ Ж 6 группа 1. Построить график функции: $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2$ 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функций: $y = \cos x$ на луче $\left[-\frac{\pi}{4};+\infty\right)$ С 6 группа 1. Постройте и прочитайте график функции y = f(x), где: $f(x) = \begin{cases} \sin, \text{ если } x \le 0 \\ x2, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, \text{ если } x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 2. Сколько решений имеет система уравнений: $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ К 6 группа 1. Постройте и прочитайте график функции y = f(x), где: $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ если } x > 0 \\ -\cos x, \text{ если } x \le 0 \end{cases}$ 2. Докажите, что функция является четной: $f(x) = \frac{x + \cos x}{x - \sin x}$ 6 группа доп. задание 1. Какая из указанных функций является четной, какая –	

нечетной, а какая не является ни четной ни нечетной:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x^3 - 1}$

б) $y = \dfrac{|x|}{\sin x \cos x}$

в) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\cos^2 x}$

З

7 группа

1. Построить график функции:

$$y = \begin{cases} -x2, \text{ если } x < 0 \\ \sin x, \text{ если } 0 \le x \le \pi \\ (x - \pi)2, \text{ если } x > \pi \end{cases}$$

а) Вычислите f(– 3), f($\dfrac{\pi}{2}$)

б) Прочитать график функции.

2. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} y = \cos x \\ |x| - y = 0 \end{cases}$$

К

7 группа

1. Построить график функции:

$y = \sin(x + \pi) + 2,5$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

$y = \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) + 0,5$

на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{4}; +\infty\right)$

Ж

7 группа

1. Построить график функции:

$y = \cos(x - \dfrac{\pi}{2}) + 2$

2. Решите графически уравнение:

$\cos x = |x| + 1$

	C 7 группа 1. Построить и прочитать график функции y = f(x), где: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & \text{если } x < 0 \\ -\cos x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$ 2. Докажите, что функция является четной: $f(x) = x6\cos x + \sin 2x$ 7 группа доп. задание 1. Докажите, что функция y = f(x) является четной, если: $f(x) = \dfrac{\cos 5x + 1}{\lvert x \rvert}$ 2. Решите графически уравнение: $\sin x = -\cos x + \dfrac{1}{2}$	
		Максимальное количество баллов за урок: <u>21</u>

Модуль 8
Периодичность функций y = sin x, y = cos x – 1 час

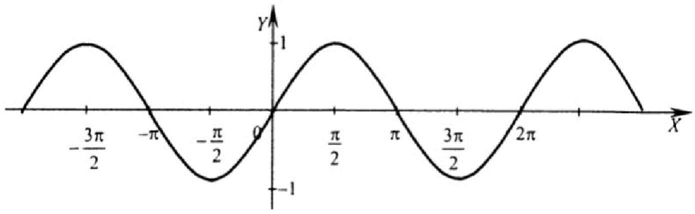
<u>ПМ</u>

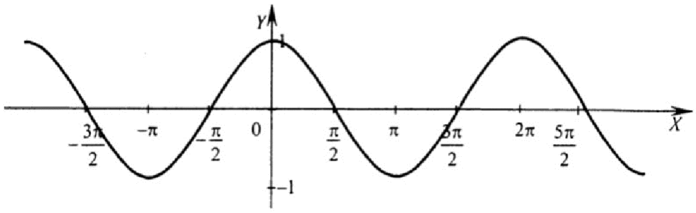
Урок 16		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока.	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: <u>1 балл.</u> Учащиеся выполняют задания устной работы. Правильный ответ: <u>2 балла</u>.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

I. Повторение изученного материала

1. Какие вы знаете тригонометрические функции числового аргумента?
2. Какие вы знаете тригонометрические функции углового аргумента?
3. В чем отличие тригонометрических функций числового аргумента от функций углового аргумента?
4. По рисункам рассказать известные свойства функций $y = \sin x$ $y = \cos x$:





Свойство 1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
Свойство 2. $y = \sin x$ – нечетная функция;
$y = \cos x$ – четная функция.
Свойство 3. $y = \sin x$ возрастает на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$, убывает $[\frac{\pi}{2}; \pi]$;
$y = \cos x$ возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$, убывает на $[0; \pi]$

Учащиеся могут назвать и другие отрезки, что позволит предположить о существовании восьмого свойства.

Свойство 4. Ограниченность сверху и снизу.
Свойство 5. Наибольшее и наименьшее значение функции.
Свойство 6. Непрерывность функции.
Свойство 7. $E(f) = [-1; 1]$.

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

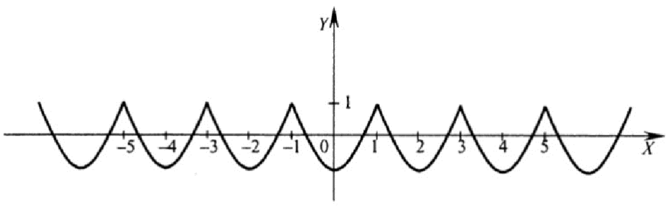
<u>ИМ</u>

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 16</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr>
<td>Обеспечить усвоение знаний по теме «Периодичность функций y = sin x, y = cos x».
Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской;</td>
<td>В предыдущих параграфах мы использовали семь свойств функций: область определения, четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность, область значений функции. Использовали мы эти свойства либо для того, чтобы построить график функции (так было, например, в § 9), либо для того, чтобы прочитать построенный график (так было, например, в § 10). Теперь настал благоприятный момент для введения еще одного (восьмого) свойства функ-</td>
<td>Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.</td>
</tr>
</table>

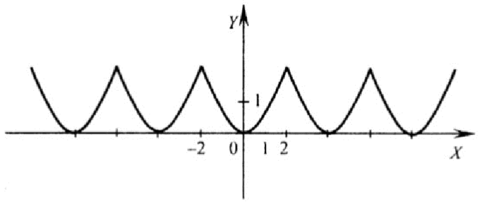
развивать логическое мышление. Рассмотреть восьмое свойство тригонометрических функций y = sin x, y = cos x, показать применение этого свойства при построении графиков этих функций и при нахождении основных периодов тригонометрических функций.	ций, которое прекрасно просматривается на построенных выше графиках функций $y = \sin x$ (см. рис. 37), $y = \cos x$ (см. рис. 41). **Определение.** Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **периодической,** если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство: $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют **периодом функции** $y = f(x)$. Отсюда следует, что, поскольку для любого x справедливы равенства: $\sin(x-2\pi) = \sin x = \sin(x+2\pi)$, $\cos(x-2\pi) = \cos x = \cos(x+2\pi)$, то *функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$ *являются периодическими и число* 2π *служит периодом и той, и другой функции.* Периодичность функции — это и есть обещанное восьмое свойство функций. А теперь посмотрите на график функции $y = \sin x$ (рис. 37). Чтобы построить синусоиду, достаточно построить одну ее волну (на отрезке $[0, 2\pi]$ или на отрезке $[-\pi, \pi]$), а затем сдвинуть эту волну по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т.д. В итоге с помощью одной волны мы построим весь график. Посмотрим с этой же точки зрения на график функции $y = \cos x$ (рис. 41). Видим, что и здесь для построения графика достаточно сначала построить одну волну (например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, а затем сдвинуть ее по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т.д. Обобщая, делаем следующий вывод. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет период* T, *то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины* T (чаще всего берут промежуток с концами в точках 0 и T или $-\frac{T}{2}$ и $\frac{T}{2}$), *а затем сдвинуть эту ветвь по оси* x *вправо и влево на* T, $2T$, $3T$ *и т.д.* У периодической функции бесконечно много периодов: если T — период, то и $2T$ — период, и $3T$ — период, и $-T$ — период; вообще *периодом является любое число вида* kT, *где* $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ Обычно стараются, если это возможно, выделить наименьший положительный период, его называют *основным периодом.* Итак, *любое число вида* $2\pi k$, *где* $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, *является периодом функций* $y = \sin x$, $y = \cos x$; 2π — *основной период и той, и другой функции.* **Пример.** Найти основной период функции: а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos \frac{x}{2}$. Решение. а) Пусть T — основной период функции $y = \sin 3x$. Положим $f(x) = \sin 3x$. Тогда $f(x+T) = \sin 3(x+T) = \sin(3x+3T)$. Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\sin(3x+3T) = \sin 3x$. Значит, $3T = 2\pi n$. Но, поскольку речь идет об отыскании основного периода, получаем $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$. б) Пусть T — основной период функции $y = \cos 0{,}5x$. Положим $f(x) = \cos 0{,}5x$. Тогда $f(x+T) = \cos 0{,}5(x+T) = \cos(0{,}5x + 0{,}5T)$. Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\cos(0{,}5x + 0{,}5T) = \cos 0{,}5x$. Значит, $0{,}5T = 2\pi n$. Но, поскольку речь идет об отыскании основного периода, получаем $0{,}5T = 2\pi$, $T = 4\pi$. *Ответ*: а) $T = \frac{2\pi}{3}$; б) $T = 4\pi$. Обобщением результатов, полученных в примере, является следующее утверждение: *основной период функции* $y = \sin kx$ ($y = \cos kx$) *равен* $\frac{2\pi}{k}$.	

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 16</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr><td>Обеспечить формирование умений по теме ««Периодичность функций y = sin x, y = cos x».
Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач.
Развивать вычислительные навыки, память, внимание.
Содействовать воспитанию активности, мобильности.
Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.</td><td>

№ 217



№ 219



№ 221

32 π является периодом, но не основным.
$\sin 3\pi = \sin(2\pi \cdot 16 + 0) = \sin 0 = 0$;
$\cos 3\pi = \cos(2\pi \cdot 16 + 0) = \cos 0 = 1$.

</td><td>Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.</td></tr>
</table>

№ 222, 223

а) $\sin 50{,}5\,\pi = \sin 0{,}5\,\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

б) $\cos 51{,}75\,\pi = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 25{,}25\pi = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin 30{,}5\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

№ 223

а) $\sin 390° = \sin 30° = \frac{1}{2}$; б) $\cos 750° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin 540° = \sin 180° = 0$; г) $\cos 930° = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

№ 224

а) $\sin^2(x - 8\pi)° = 1 - \cos^2(16\pi - x)$.
Упростим левую часть: $\sin^2(x - 8\pi)° = \sin^2 x$.
Упростим правую часть: $1 - \cos^2(16\pi - x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.
$\sin^2 x = \sin^2 x$, что и требовалось доказать.
б) $\cos^2(4\pi + x) = 1 - \sin^2(22\pi - x)$; $\cos^2 x = \cos^2 x$.

№ 225 (а, в)

а) $y = \sin 2x$, $T = \pi$, $y(x + T) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = y(x)$;

в) $y = \sin\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$, $y(x + T) = \sin(\frac{x}{2} + 2\pi) = \sin\frac{x}{2} = y(x)$.

Решение:

$\sin(32\pi - t) = \sin(2\pi - t) = \frac{5}{13}$.

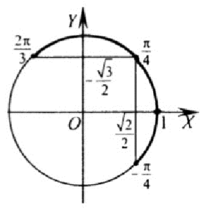
(*Ответ*: $\frac{5}{13}$.)

№ 228 (в, г)

в) $\sin(t + 4\pi) + \sin(t - 6\pi) = \sqrt{3}$;

$\sin t + \sin t = \sqrt{3}$; $2\sin t = \sqrt{3}$; $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in z,\ t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in z.$



(*Ответ*: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in z.$)

г) $\cos(t + 2\pi) + \cos(t - 8\pi) = \sqrt{2}$. $2\cos t = \sqrt{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

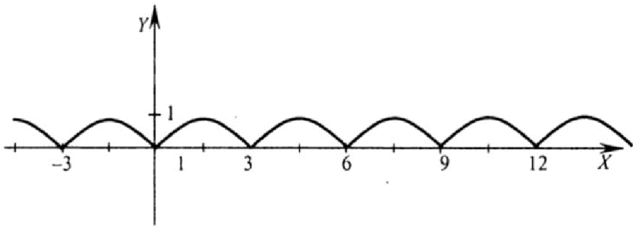
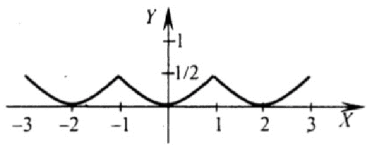
$t = \frac{\pi}{4} + 2\pi n\ ,\ n \in z;\ t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z.$

(*Ответ*: $t = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z.$)

II уровень № 225 (в), № 228 (г) учащиеся решают самостоятел
с последующей проверкой.

МКЗ

Урок 16		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы. **Домашнее задание** § 11, № 218, 220, 225 (б, г).	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания. Учащиеся

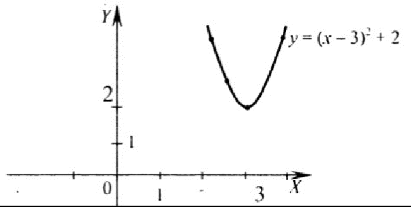
	Ответы и решения: 2. I уровень: № 227 (а). 3. II уровень: дополнительно № 228 (а, б). ***№ 218***  ***№ 220***  ***№ 225 (б, г)*** б) $y = \cos 3x$, $T = \frac{2\pi}{3}$; $y(x + T) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = y(x)$; г) $y = \cos\frac{3x}{4}$, $T = \frac{8\pi}{3}$; $y(x + T) = \cos(\frac{3x}{4} + 2\pi) = \cos\frac{3x}{4} = y(x)$. ***№ 228 (а, б)*** а) $\sin(t + 2\pi) + \sin(t - 4\pi) = 1$; $\sin t + \sin t = 1$; $\sin t = \frac{1}{2}$; $t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in z$; б) $\cos(2\pi + t) + \cos(t - 2\pi) = 0$; $4\cos t = -2$; $\cos t = -\frac{1}{2}$; $t =$ $= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z$.	записывают домашнее задание.
		Максимальное количество баллов за урок: 9

Модуль 9

Как построить график функции y = mf (x), если известен график функции y = f (x) – 1 час

ПМ

Урок 17		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. **Устная работа**	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: 1 балл. Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный

	Повторение изученного материала 1. Объясните, как, зная график функции $y = f(x)$, строить графики функции: а) $y = f(x + a)$, – с помощью параллельного переноса на – a, вдоль оси x; б) $y = f(x) + b$, – с помощью параллельного переноса на b единиц, вдоль оси y; в) $y = f(x + a) + b$, $\longleftrightarrow$ на – a ед., $\updownarrow$ на b ед.; г) Построить график функции $y = (x - 3)^2 + 2$. Графиком является парабола с вершиной в точке $O'(3; 2)$, $y = x^2$. 	ответ: <u>2 балла.</u> Учащиеся выполняют задания устной работы. Правильный ответ: <u>2 балла</u>.

<u>ИМ</u>

Урок 17		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить усвоение знаний по теме «Как построить график функции y = mf (x), если известен график функции y = f (x)». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Ознакомить с преобразованием, позволяющим строить график функции y = mf (x), зная график функции y = f (x).	**В курсе алгебры 8—9-го классов вы научились, зная график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = f(x+a)$, $y = f(x)+b$, $y = f(x+a)+b$. Все эти графики получаются из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $\lvert a \rvert$ единиц масштаба вправо или влево вдоль оси x и на $\lvert b \rvert$ единиц масштаба вверх или вниз вдоль оси y (мы использовали этот прием в § 9 и 10). Теперь мы познакомимся еще с одним преобразованием, позволяющим, зная график функции $y = f(x)$, довольно быстро строить график функции $y = mf(x)$, где m — любое действительное число (кроме нуля)*.**	_Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — положительное число.

Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением на m ординат соответствующих точек графика функции $y = f(x)$. Такое преобразование графика называют обычно *растяжением от оси x с коэффициентом m*. Отметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x, т.е. точки, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 0$.

Если $m < 1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом m, а о *сжатии к оси x с коэффициентом* $\frac{1}{m}$. Например, если $m = \frac{1}{3}$, то говорят не о растяжении с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о сжатии с коэффициентом 3.

На рис. 45 показаны графики функций $y = \sin x$ и $y = 3 \sin x$, а на рис. 46 — графики функций $y = \cos x$ и $y = 0{,}5 \cos x$.

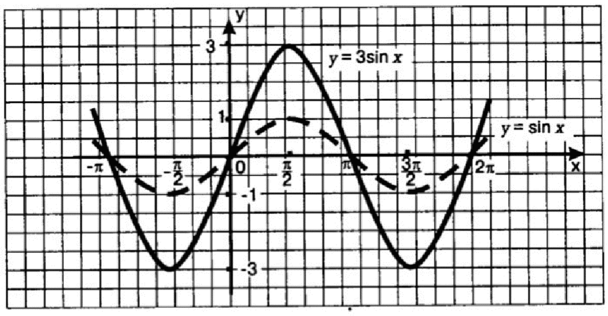


Рис. 45

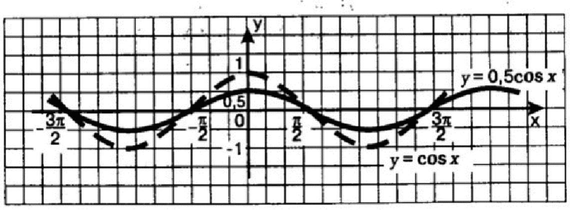


Рис. 46

На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, сначала работают с одной полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график.

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где $m = -1$. Иными словами, речь идет о построении графика функции $y = -f(x)$.

Ординаты точек графика функции $y = -f(x)$ отличаются от соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$ только знаком. Точки $(x;\ f(x))$ и $(x;\ -f(x))$ симметричны относительно оси x (рис. 47). Значит, график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x. На рис. 48 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = -\cos x$.

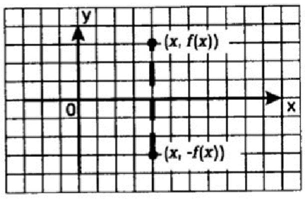


Рис. 47

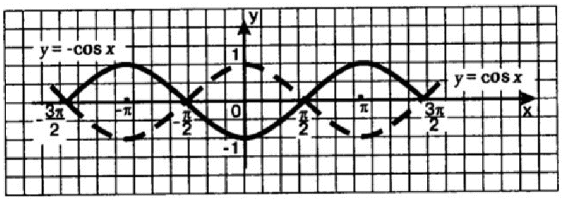


Рис. 48

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — отрицательное число.

Так как в этом случае справедливо равенство $mf(x) = -|m|f(x)$, то речь идет о построении графика функции $y = -|m|f(x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

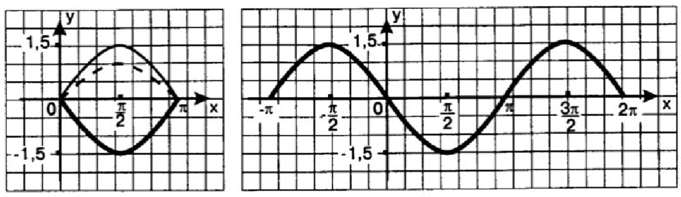
2) осуществить его растяжение от оси x с коэффициентом $|m|$;

3) растянутый (или сжатый) график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

Пример. Построить график функции $y = -1{,}5 \sin x$.

Решение. 1) Построим график функции $y = \sin x$, точнее, одну полуволну графика (пунктирная линия на рис. 49*а*).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 1,5; получим одну полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ (тонкая линия на рис. 49*а*).



а *б*

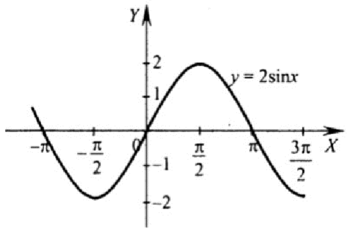
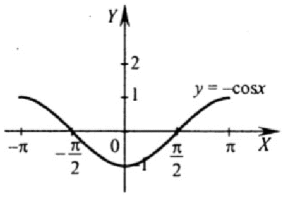
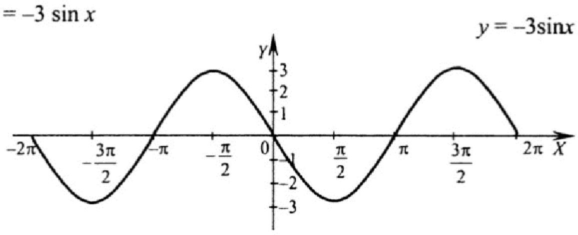
Рис. 49

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -1{,}5 \sin x$ (она выделена на рис. 49*а*).

4) С помощью построенной полуволны получаем весь график функции $y = -1{,}5 \sin x$ (рис. 49*б*).

РМ

Урок 17		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации**

		по выполнению заданий, оценка
Обеспечить формирование умений по теме «Как построить график функции y = mf (x), если известен график функции y = f (x)». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебны х задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействоват ь воспитанию активности, моб ильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	***№ 229 (а, б)***   ***№ 231*** а) на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $y_{max} = 2$; $y_{min} = 0$; б) на $(0, \frac{3\pi}{2})$; $y_{min} = -2$; y_{max} – не существует; в) $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = -1$; г) $x \in [\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4})$; $y_{max} = \sqrt{2}$; $y_{min} = -2$. ***№ 232*** $y = -3 \sin x$ 	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.

а) $x \in [0; +\infty)$; $y_{max} = 3$; $y_{min} = -3$;

б) $x \in (-\infty; \frac{\pi}{2})$; $y_{max} = 3$; $y_{min} = -3$;

в) $x \in [\frac{\pi}{4}; +\infty)$; $y_{max} = 3$; $y_{min} = -3$;

г) $x \in (-\infty; 0)$; $y_{max} = 3$; $y_{min} = -3$.

№ 233

Известно, что $f(x) = -3 \sin x$

Найдите:

а) $f(-x) = -3 \sin x$; б) $2f(x) = 6 \sin x$;

в) $2f(x) + 1 = 6 \sin x + 1$; г) $f(-x) + f(x) = -3 \sin x + 3 \sin x$.

№ 234

а) $f(-x)$; б) $2f(x)$; в) $f(x + 2\pi)$; г) $f(-x) - f(x)$.

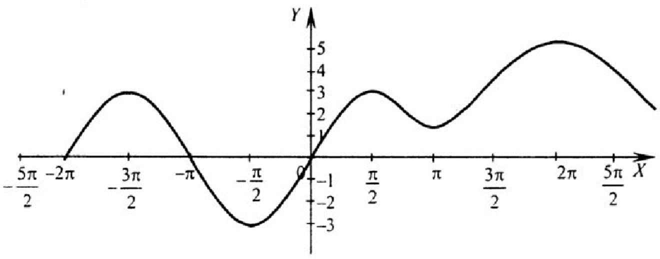
Ответы:

а) $f(-x) = -\frac{1}{2} \cos x$; б) $2f(x) = -\cos x$;

в) $f(x + 2\pi) = -\frac{1}{2} \cos x$; г) $f(-x) - f(x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x = 0$.

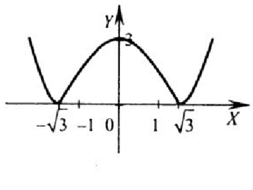
3. С комментированием у доски решить № 238 (а).

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & \text{если } x < \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x + 3, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



1) D (f) = R;
2) E $(f) = [-3; 5]$;
3) при $x < \frac{\pi}{2}$, $\tau = 2\pi$, при $x \geq \frac{\pi}{2}$, $\tau = 2\pi$;
4) ни четная, ни нечетная;
5) $f(x) = 0$ при $x = -\pi n$, $n \geq 0$;
6) $f_{min} = -3$, $f_{max} = 5$;
7) $f(x) < 0$ при $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \leq 0$;
   $f(x) > 0$ при $-2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \leq -1$, $x > 0$;
8) Убывает на промежутках
   $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, $\left[2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right]$ $n \leq -1$; $k \geq 1$.
   Возрастает на промежутках
   $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \leq 0$, $\left[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right]$, $k \geq 1$.

4. Построить график функций:
   а) $y = |3 - x^2|$; б) $y = x^2 - 3|x| + 2$.



Строим при $x \geq 0$ $y = x^2 - 3x + 2$ и отображаем относительно оси Y симметрично.

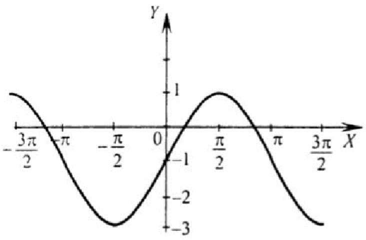
МКЗ

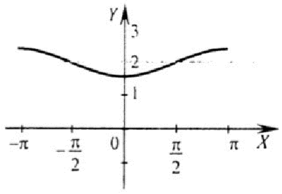
Урок 17

Дидактические цели	Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий	Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

<u>МК</u>

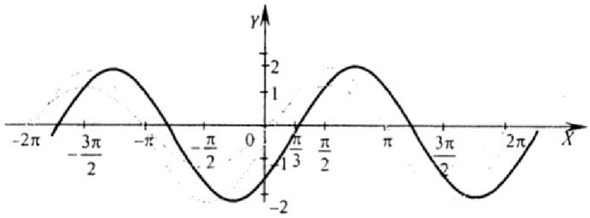
Урок 17		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	**IV. Самостоятельная работа** ***Уровень I*** ***Вариант I***: № 235 (а), 236 (б). ***Вариант II***: № 235 (б), 236 (а). ***Уровень II*** 3) $y = \|x^2 - 9\|x\| + 20\|$. 3) $y = \|x^2 - 9\|x\| + 10\|$. ***Ответы и решения:*** ***№ 235*** а) $y = 2\sin x - 1$; б) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 2$.	Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: <u>4 балла.</u>



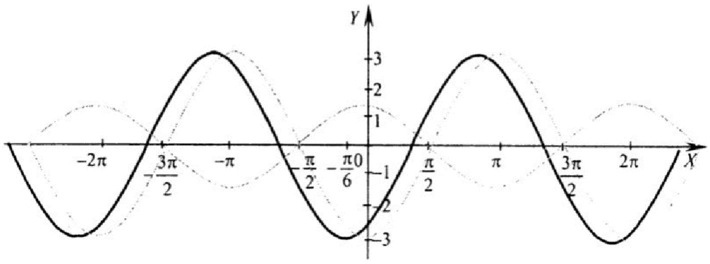


№ 236

а) $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$.



б) $y = -3\cos(x + \frac{\pi}{6})$.



Домашнее задание:
§ 12, № 230, 235 (в), 236 (в).
2 уровень: № 238 (б), $|y| = x^2 - 2x$.

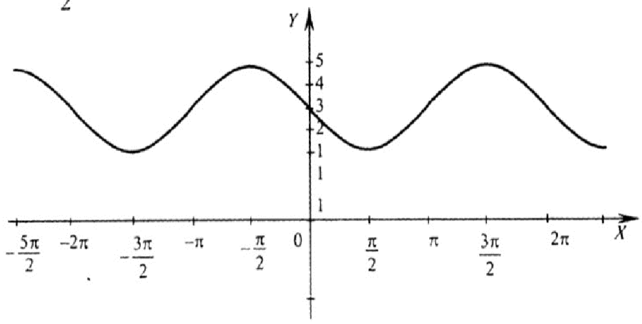
Учащиеся записывают домашнее задание.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Ответы и решения:

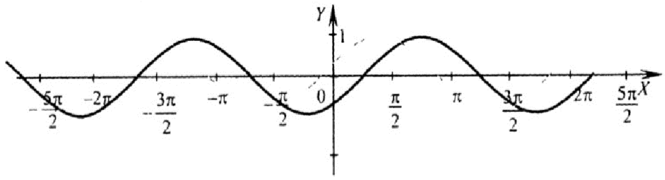
№ 235(в)

$y = -\frac{3}{2}\sin x + 3.$



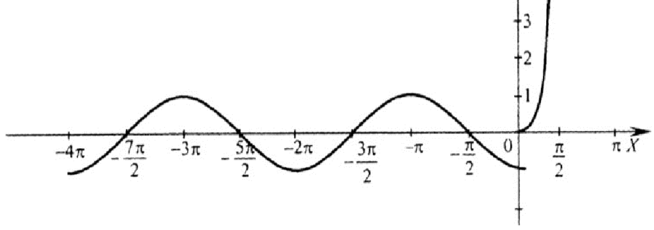
№ 236(в)

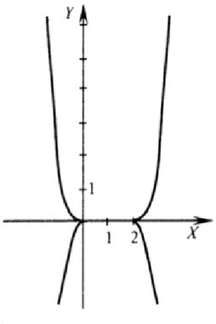
$y = -\sin(x + \frac{2\pi}{3}).$



№ 238 (б)

$$f(x) = \begin{cases} -2\cos x^3, & \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^4, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}.$$





$|y| = x^2 - 2x.$

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Максимальное количество баллов за урок: <u>23</u></td>
</tr>
</table>

Модуль 10

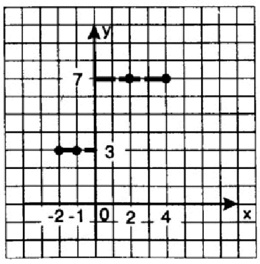
Как построить график функции y = f (Rx), если известен график функции y = f (x) – 1 час

<u>ПМ</u>

Урок 18		
Дидактические	**Деятельность учителя.**	**Деятельность**

цели	Учебный материал с указанием заданий	учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. **Устная работа** **Проверка домашнего задания** 1. У доски 3 ученика выполняют № 235 (в), 236 (в), 238 (б). 2. Устно выполняется № 230: – Назовите область определения и множество значений функций. – Назовите наибольшее и наименьшее значения функций. – Назовите период функции (основной). – Назовите точки пересечения с осью ОХ. 3. Проверить задания, выполненные у доски (см. решение в предыдущем уроке).	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: 1 балл. Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: 2 балла. Учащиеся выполняют задания устной работы. Правильный ответ: 2 балла.

ИМ

Урок 18		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Обеспечить усвоение знаний по теме «Как построить график функции y = f (Rx), если известен график функции y = f (x)». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Ознакомить с преобразованием, позволяющим быстро строить график функции	**В этом параграфе мы познакомимся еще с одним преобразованием, позволяющим, зная график функции $y = f(x)$, довольно быстро строить график функции $y = f(kx)$, где k — любое действительное число (кроме нуля). Рассмотрим несколько случаев.** **Задача 1.** **Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — положительное число.** **Чтобы вам было проще понять суть дела, рассмотрим конкретный пример, когда $k = 2$. Как построить график функции $y = f(2x)$, если известен график функции $y = f(x)$?** **Пусть на графике функции $y = f(x)$ имеются точки (4; 7) и (−2; 3). Это значит, что $f(4) = 7$ и $f(-2) = 3$. Куда переместятся точки, когда мы строим график функции $y = f(2x)$?**  **Рис. 50** **Смотрите (рис. 50): если $x = 2$, то $y = f(2x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 7$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (2; 7). Далее, если $x = -1$, то $y = f(2x) = f(-1 \cdot 2) = f(-2) = 3$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (−1; 3). Итак, на графике функции $y = f(x)$ есть точки (4; 7) и (−2; 3), а на графике функции $y = f(2x)$ есть точки (2; 7) и (− 1; 3), т.е. точки с той же ординатой,**	_Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

y = f (Rx), зная график функции y = f (x), где R – любое действительное число, не равное нулю.

но в два раза меньшей (по модулю) абсциссой. Так же обстоит дело и с другими точками графика функции $y = f(x)$, когда мы переходим к графику функции $y = f(2x)$ (рис. 51). Такое преобразование называют обычно *сжатием к оси y с коэффициентом 2.*

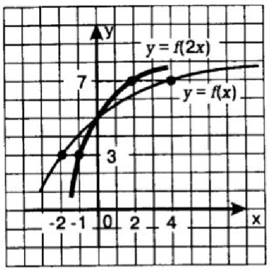


Рис. 51

Вообще, *график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k.* Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью y (если $x = 0$, то и $kx = 0$).

Впрочем, если $k < 1$, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$ (если $k = \frac{1}{3}$, то говорят не о сжатии с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о растяжении с коэффициентом 3).

Пример 1. Построить графики функций:

а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = \cos 2x$.

Решение. а) Построим полуволну графика функции $y = \sin x$ и осуществим ее растяжение от оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \sin\frac{x}{2}$ (рис. 52). Затем построим весь график (рис. 53).

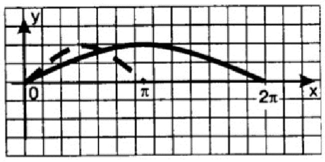


Рис. 52

б) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ и осуществим ее сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \cos 2x$ (рис. 54). Затем построим весь график (рис. 55).

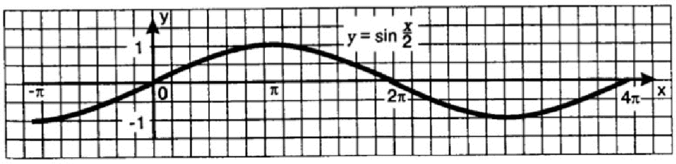


Рис. 53

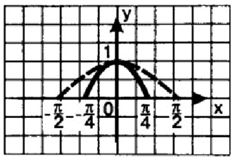


Рис. 54

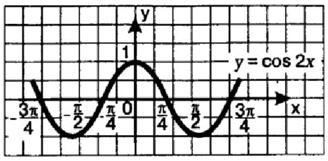


Рис. 55

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k = -1$. Иными словами, речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$.

Предположим, что на графике функции $y = f(x)$ есть точки (3; 5) и (−6; 1). Это значит, что $f(3) = 5$, а $f(-6) = 1$. Соответственно на графике функции $y = f(-x)$ имеется точка (−3; 5), так как при подстановке в формулу $y = f(-x)$ значения $x = -3$ получим $y = f(3) = 5$. Аналогично убеждаемся, что графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка (6; 1).

Итак, точке (3; 5), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (−3; 5), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$; точке (−6; 1), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (6; 1), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$. Указанные пары точек симметричны относительно оси y (рис. 56).

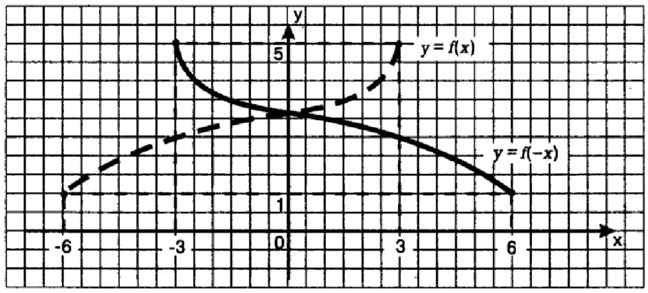


Рис. 56

Обобщая эти рассуждения, приходим к следующему выводу: *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси y.*

Замечание. Если речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$, то обычно сначала проверяют, является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной. Если $y = f(x)$ — четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно построить график функции $y = -f(x)$.

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — отрицательное число.

Так как в этом случае справедливо равенство $f(kx) = f(-|k|x)$, то речь идет о построении графика функции $y = f(-|k|x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие (или растяжение) к оси y с коэффициентом $|k|$;

3) сжатый (или растянутый) график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

Пример 2. Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Заметим прежде всего, что $\cos(-2x) = \cos 2x$.

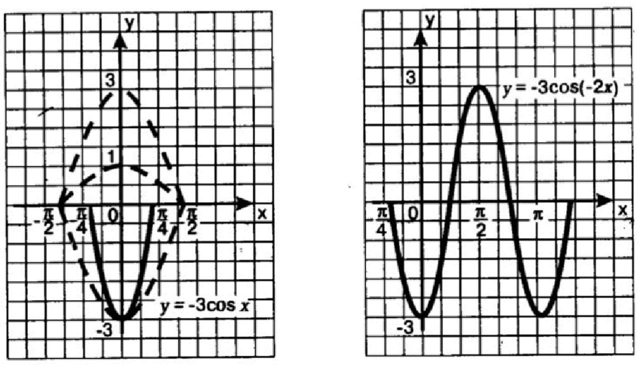
1) Построим график функции $y = \cos x$, точнее, одну полуволну графика (рис. 57*а*. Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$.

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$.

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$ сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (на рис. 57*а* сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 57*б*). ◀



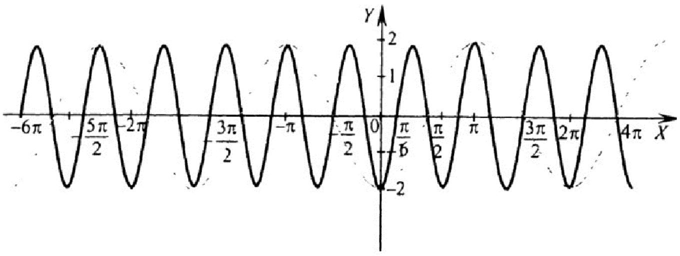
а *б*

Рис. 57

<u>РМ</u>

Урок 18		
Дидактические	**Деятельность учителя.**	**Деятельность**

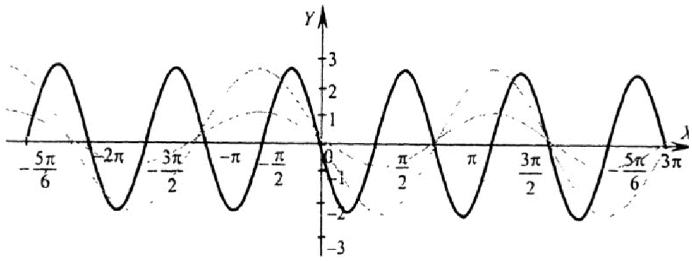
цели	Учебный материал с указанием заданий	учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка
Обеспечить формирование умений по теме ««Как построить график функции y = mf (x), если известен график функции y = f (x)». Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач. Развивать вычислительные навыки, память, внимание. Содействовать воспитанию активности, мобильности. Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.	1. Устно решить № 242–244. ***№ 242*** $y = \sin 2x$ а) $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$; $y_{max} = 0$; $y_{min} = -1$; б) $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = -1$; в) $x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$; $y_{min} = -1$; $y_{max} = 1$; г) $x \in [0; \pi]$; $y_{min} = -1$; $y_{max} = 1$. ***№ 243*** $y = \cos\frac{x}{3}$; а) $x \in [0; +\infty)$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = -1$; б) $x \in (-\infty; \pi)$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = -1$; в) $x \in (-\infty; \frac{\pi}{2}]$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = -1$; г) $(\frac{\pi}{3}; +\infty)$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = -1$. ***№ 244*** $f(x) = \cos\frac{x}{3}$. а) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$; б) $3f(x) = 3\cos\frac{x}{3}$; в) $f(-3x) = \cos x$; г) $f(-x) - f(x) = 0$. ***№ 241 (б)*** Построить график функции $y = -2\cos(-3x)$. 1) $y = \cos x$; 2) $y = 2\cos x$; 3) $y = -2\cos x$; 4) $y = -2\cos 3x$.	Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.



№ 241 (в)

$y = 2\sin(-2\,x)$.

1) $y = \sin x$; 2) $y = -\sin x$; 3) $y = -2\sin x$; 4) $y = -2\sin 2$



№ 245

Известно, что $f(x) = 2\sin 2x$.

Найдите:

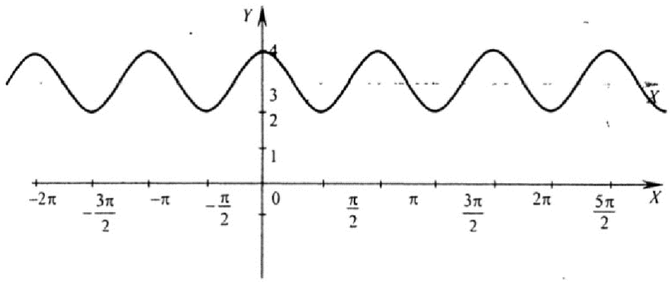
а) $f(-x)$	а) $f(-x) = -\sin 2x$;
б) $2\,f(x)$	б) $2\,f(x) = 2\sin 2x$;
в) $f(-3x)$;	в) $f(-3x) = -\sin 6x$;
г) $f(-x) - f(x)$;	г) $f(-x) - f(x) = -2\sin^2 x$.

№ 246 (в, г)

в) $y = \cos 2x + 3$.

Строим:

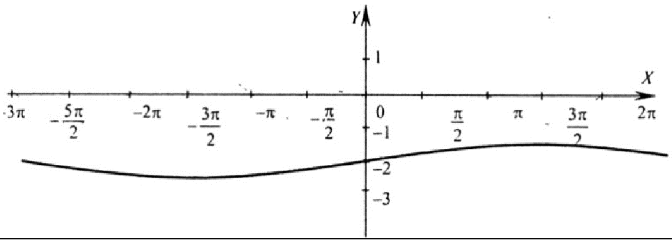
1) $y = \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = \cos 2x + 3$.



г) $y = \sin\frac{x}{3} - 2$.

Строим:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin\frac{x}{3}$; 3) $y = \sin\frac{x}{3} - 2$.



МКЗ

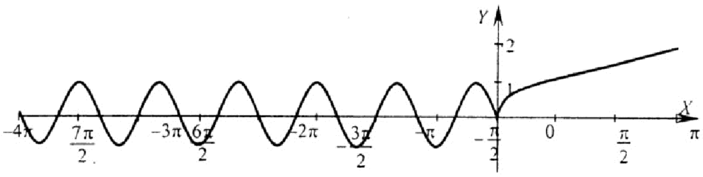
Урок 17

Мурмилова Екатерина Сергеевна

Дидактические цели	Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий	Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

МК

Урок 18		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	**IV. Самостоятельная работа** ***Вариант I***: № 247 (б), 249 рис. 14, 16. ***Вариант II***: № 247 (б), 249 рис. 15, 17. ***Ответы и решения:*** ***Вариант I*** ***№ 247 (б)*** 1. Построить и прочитать график функции: $f(x)=\begin{cases}-\sin 3x, & \text{если } x<0,\\ \sqrt{x}, & \text{если } x\ge 0\end{cases}$	Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: <u>4 балла.</u>



1) $D(f) = R$;
2) $E(f) = [-1; +\infty)$;
3) при $x \le 0$, периодическая с основным периодом $T = \frac{2}{3}\pi$;
4) ни четная, ни нечетная;
5) $f(x) = 0$ при $x = -\frac{\pi}{3} \cdot n,\ n \ge 0,\ n \in z$;
6) $f_{\min} = -1$; $f_{\max} =$ нет;
7) $f(x) < 0$, при $x \in (-\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi n)$; $n \ge 1$; $f(x) > 0$,

при $x\ (-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi n; -\frac{2}{3}\pi n)$; $n \ge 0,\ x \ge 0$;

8) $f(x)$ возрастает при $x \in [\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\pi n],\ n \ge 1;\ x \subset [0; +\infty]$,

убывает, при $x \in [-\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}\pi n; \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi n],\ x \ge 1;\ x \in [-\frac{\pi}{3}; 0]$.

№ 249

а) Рис. 14

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \sin 2x, & x \ge 0 \end{cases}$$

в) Рис. 16

$$y = \begin{cases} \sin 2x, & x \le 0 \\ 2\cos x, & x > 0 \end{cases}$$

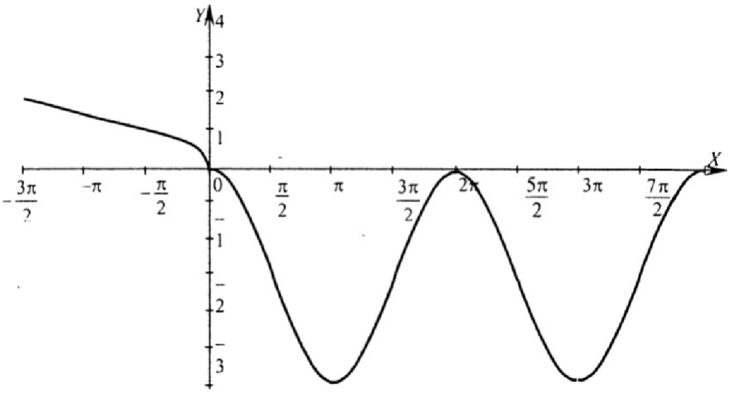
Вариант II

№ 248 (б)

Построить и прочитать график функции:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если } x \le 0; \\ 3\cos x - 3, & \text{если } x > 0 \end{cases} \infty$$

Учащиеся записывают домашнее задание.



1) $D(f) = R$;
2) $E(f) = [-6; +\infty)$;
3) при $x \geq 0$ периодическая с основным периодом $T = 2\pi$;
4) ни четная, ни нечетная;
5) $f(x) = 0$, при $x = 2\pi n$, $n \geq 0$, $n \in z$;
6) $f_{\min} = -6$; $f_{\max}$ = нет;
7) $f(x) < 0$, при $x \in (2\pi n; 2\pi n + 2\pi)$; $n \geq 0$; $f(x) > 0$, при $x < 0$;
8) $f(x)$ возрастает при $x \in [2\pi n - \pi; 2\pi n]$, при $n \geq 1$; $f(x)$ убывает при $x \in [2\pi n; 2\pi n + \pi]$, при $n \geq 0$; $n \leq 0$.

№ 249

б) Рис. 15

$$y = \begin{cases} \cos 3x, & x \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}] \\ -1, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

б) Рис. 17

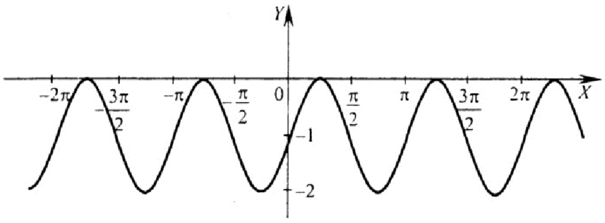
$$y = \begin{cases} -2\sin x, & x \in [-2\pi; 0] \\ \cos\frac{x}{2}, & x \in (0; 3\pi] \end{cases}$$

Домашнее задание:
№ 239, 240, 241 (а, г), 246 (а, б), 247 (а).
2 уровень: № 248 (а).

Ответы и решения:

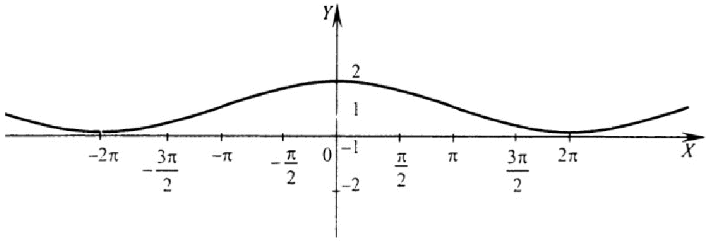
№ 246

а) $y = \sin 2x - 1$.
1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin 2x$; 3) $y = \sin 2x - 1$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


б) $y = \cos\frac{x}{2} + 1$.

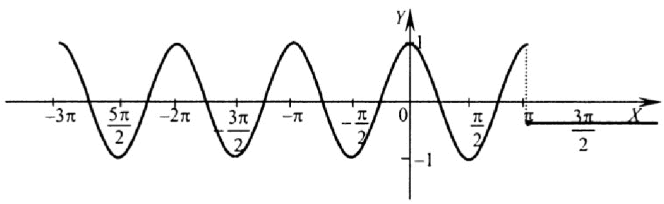
1) $y = \cos x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$; 3) $y = \cos\frac{x}{2} + 1$.



№ 247 (а)

Постройте и прочитайте график функции:

$$y = \begin{cases} \cos 2x, & \text{если } x \le \pi; \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$



1) $D(f) = R$;
2) $E(f) = [-1; +1)$;
3) при $x \le \pi$, $\tau = \pi$;
4) ни четная, ни нечетная;
5) $f(x) = 0$ при $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \le -2$, $n \in z$;
6) $f_{\min} = -1$; $f_{\max} = 1$;
7) $f(x) < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{4} - \pi n; \frac{3\pi}{4} - \pi n) \cup (\pi; +\infty)$, $n \ge 1$; $f(x) > 0$,
при $x \in (-\frac{\pi}{4} - \pi n; -\frac{\pi}{4}\pi n) \cup (\frac{3\pi}{4}; \pi)$ $n \ge 1$;
8) $f(x)$ возрастает при $x \in [\frac{\pi}{2} - \pi n; \pi - \pi n]$, при $n \ge 0$; $f(x)$ убывает
при $x \in [-\pi n; \frac{\pi}{2} - \pi n]$, при $n \ge 1$.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Максимальное количество баллов за урок: <u>25</u></td>
</tr>
</table>

Модуль 11
График гармонического колебания – 1 час

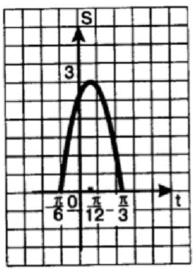
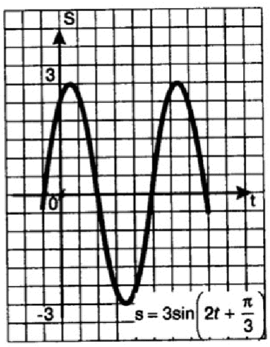
<u>ПМ</u>

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 19</th></tr>
<tr>
<th>Дидактические цели</th>
<th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th>
<th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению</th>
</tr>
</table>

		заданий, оценка
Активизация учебной деятельности. Актуализация опорных знаний.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока. **Устная работа** **Проверка домашнего задания** 1. № 246 (а). Перечислить этапы построения графика, назвать основной период функции, область определения и множество значений функции. 2. № 247 (а). Прочитать график функции.	Учащиеся записывают тему урока. Присутствие: 1 балл. Учащиеся сдают тетради с домашним заданием, правильный ответ: 2 балла. Учащиеся выполняют задания устной работы. Правильный ответ: 2 балла.

ИМ

Урок 19		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

Обеспечить усвоение знаний по теме «График гармонического колебания». Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление. Ознакомить учащихся с уравнением гармонических колебаний и построением графиков гармонических колебаний.	**Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой $s = A\sin(\omega t+\alpha)$. Эту формулу называют *законом* (или *уравнением*) *гармонических колебаний*. Если, например, материальную точку, висящую на пружине, вывести из положения равновесия, то она начнет совершать вертикальные колебания, причем закон движения выражается указанной выше формулой, где t — время, а s — отклонение материальной точки от положения равновесия.** **Пример.** Построить график функции $s=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$ в системе координат $s0t$. Решение. Имеем $s=3\sin 2\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$. Чтобы построить график такой функции, нужно над синусоидой $s=\sin t$ (или, как мы условились выше, над полуволной синусоиды) осуществить следующие преобразования: 1) сжать ее к оси ординат с коэффициентом 2; 2) растянуть от оси абсцисс с коэффициентом 3; 3) сжатую и растянутую полуволну сдвинуть вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{6}$ влево. В результате получится главная полуволна искомого графика, с помощью которой без труда можно построить весь график. На практике главную полуволну предпочитают строить по-другому. Решим уравнение $3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)=0$ (это даст нам точки пересечения графика с осью абсцисс). Имеем (см. пример 6 в § 4): $2t+\frac{\pi}{3}=\pi k,$ $2t=-\frac{\pi}{3}+\pi k,$ $t=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}.$ Дадим параметру k два соседних значения 0 и 1. При $k=0$ получаем $t_1=-\frac{\pi}{6}$; при $k=1$ получаем $t_2=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$. Точки $A\left(-\frac{\pi}{6};\ 0\right)$ и $B\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ служат концами одной полуволны искомого графика. Серединой отрезка $\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$ является точка $\frac{\pi}{12}$ — среднее арифметическое (полусумма) чисел $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$. Найдем значение заданной функции в точке $\frac{\pi}{12}$: $s=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}=3\cdot 1=3.$ Точка $C\left(\frac{\pi}{12};\ 3\right)$ — верхняя точка искомой полуволны. По трем точкам A, B и C строим сначала полуволну искомого графика (рис. 58), а затем и весь график (рис. 59). В уравнении гармонических колебаний $s=A\sin(\omega t+\alpha)$ все величины A, ω, α имеют определенный физический смысл: A (или $-A$,  Рис. 58  Рис. 59 если $A<0$) — амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия); ω — частота колебаний; α — начальная фаза колебаний. Так, в рассмотренном примере $s=3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$ амплитуда равна трем ($A=3$), частота колебаний равна двум ($\omega=2$), начальная фаза колебаний равна $\frac{\pi}{3}$ $\left(\alpha=\frac{\pi}{3}\right)$.	_Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.

РМ и МК

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 19</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr>
<td>

Обеспечить формирование умений по теме «График гармонического колебания».

Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач.

Развивать вычислительные навыки, память, внимание.

Содействовать воспитанию активности, мобильности.

Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.

Осуществить контроль усвоения материала учащимися.

Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;

</td>
<td>

1. С комментированием у доски решить № 251 (а).

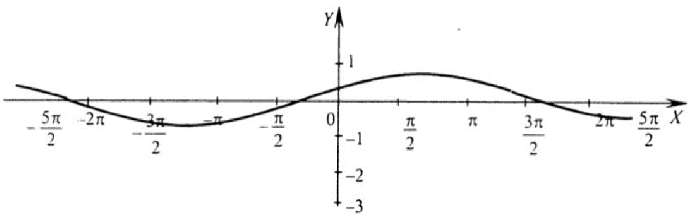
График функции $y = -2\cos 2(x + \frac{\pi}{3})$ можно получить из графика функции $y = \cos x$, осуществив следующие преобразования:

1) сжать к оси ординат с коэффициентом 2;
2) растянуть от оси абсцисс с коэффициентом 2;
3) сдвинуть вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{3}$ влево, рис. см. ниже.
4) отобразить симметрично относительно оси x.

2. Самостоятельно решить на доске № 253. I в. – а, II в. – б. Построить график функции.

Вариант I

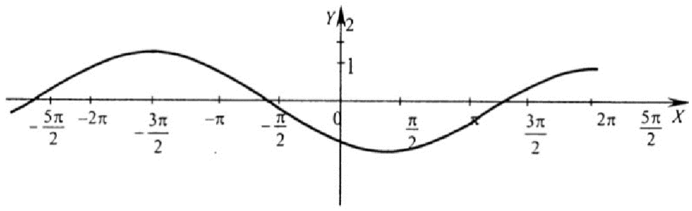
$y = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$.



1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin\frac{x}{2}$; 3) $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$; 4) $y = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$.

Вариант II

$y = -\frac{3}{2}\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$.



1) $y = \cos x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$; 3) $y = -\frac{3}{2}\cos\frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{3}{2}\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$.

Домашнее задание

§ 14, № 250.

2 уровень: 252 (б).

Ответы и решения:

№ 250.

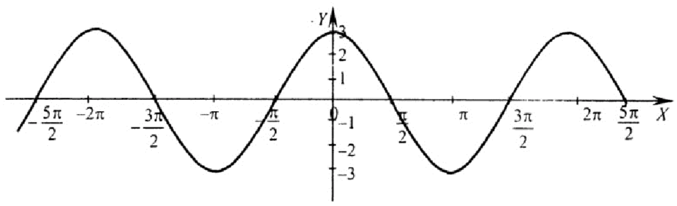
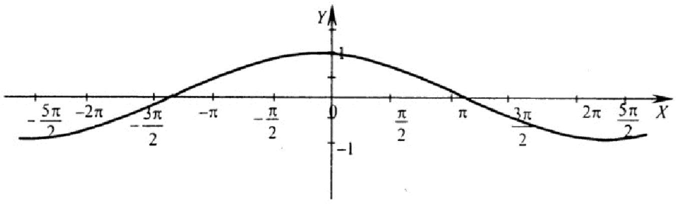
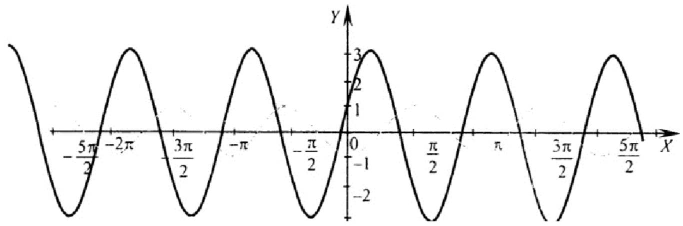
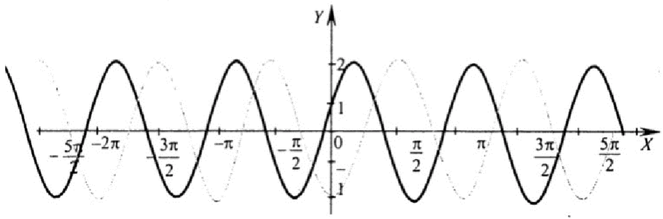
а) $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{2})$.

</td>
<td>

Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.

Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: <u>4 балла.</u>

</td>
</tr>
</table>

	1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; 3) $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{2})$.  б) $y = \cos\frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3})$. 1) $y = \cos x$; 2) $y = \cos\frac{1}{2}x$; 3) $y = \cos\frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3})$  ***№ 252 (б)*** Построить график функции $y = -3\cos(2x + \frac{\pi}{3})$. 1) $y = \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$; 4) $y = -3\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.  ***№ 251 (а)*** $y = -2\cos 2(x + \frac{\pi}{3})$. 	Учащиеся записывают домашнее задание
		Максимальное количество баллов за урок: <u>25</u>

Модуль 12

Функции y = tg x, y = ctg x, их свойства и графики – 2 часа

<u>ПМ</u>

Урок 20		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Активизация учебной деятельности.	Приветствие, проверка отсутствующих. Объявление темы урока.	Учащиеся записывают тему урока.

Актуализация опорных знаний.	**Устная работа.** По заранее заготовленным чертежам перечислить этапы построения графиков. № 250, 252 (б).	Присутствие: 1 балл. Учащиеся устно выполняют задания. Правильный ответ: 1 балл.

ИМ

<table>
<tr><th colspan="3">Урок 20</th></tr>
<tr><th>Дидактические цели</th><th>Деятельность учителя.
Учебный материал с указанием заданий</th><th>Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка</th></tr>
<tr><td>Обеспечить усвоение знаний по теме «Функции y = tg x, y = ctg x, их свойства и графики».
Способствовать развитию пространственного воображения; умению работать с интерактивной доской; развивать логическое мышление.
Ознакомить со свойствами функций y = tg x, y = ctg x.</td><td>

Отметим свойства функции $y = \mathrm{tg}\, x$, причем в первую очередь те, которые помогут составить представление о графике функции (большинство из этих свойств фактически известно нам из § 5). Когда такое представление сложится, начнем строить график, как обычно, по точкам.

Свойство 1. ***Область определения функции $y = \mathrm{tg}\, x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.***

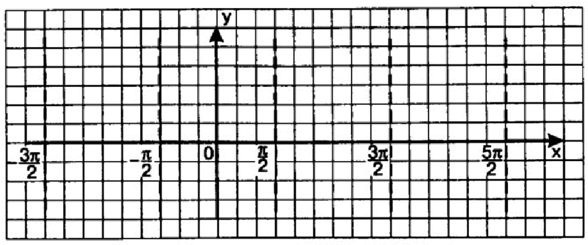


Рис. 60

Это свойство означает, что на графике функции нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{5\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, и т.д. Эти прямые проведены пунктиром на рис. 60.

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в полосе между $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ и т.д.).

Свойство 2. ***$y = \mathrm{tg}\, x$ — периодическая функция с основным периодом π.***

Это следует из двойного равенства

$$\mathrm{tg}\,(x - \pi) = \mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\,(x + \pi),$$

полученного в § 5.

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на $\pi, 2\pi, 3\pi$ и т.д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. ***$y = \mathrm{tg}\, x$ — нечетная функция.***

Это следует из доказанного в § 5 соотношения $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, нам можно действовать так: построить по точкам часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

</td><td>Учащиеся работают в тетрадях: строят необходимые чертежи, записывают определения.</td></tr>
</table>

Приступим к построению графика на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 61). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 62). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 63).

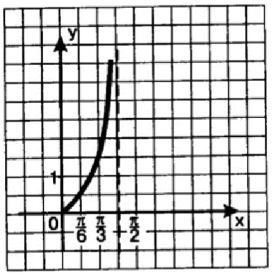


Рис. 61

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Ту ее часть, которая изображена на рис. 62, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45°. Почему это так, вы узнаете из главы 4.

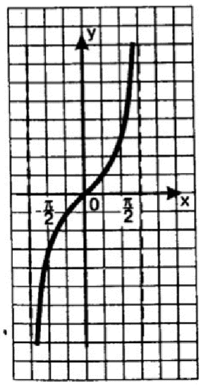


Рис. 62

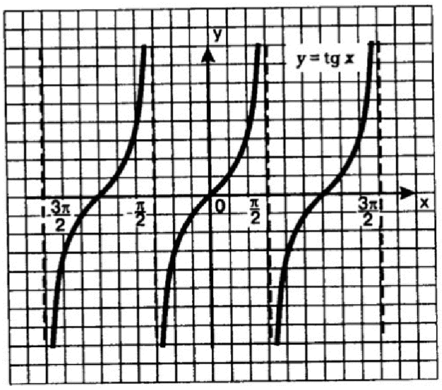


Рис. 63

Отметим еще несколько свойств функции $y = \operatorname{tg} x$.

	Свойство 4. ***Функция возрастает на интервале*** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В более общем виде — ***функция возрастает на любом интервале вида*** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. **Свойство 5.** ***Функция*** $y=\text{tg } x$ ***не ограничена ни сверху, ни снизу.*** **Свойство 6.** ***У функции*** $y=\text{tg } x$ ***нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.*** **Свойство 7.** ***Функция*** $y=\text{tg } x$ ***непрерывна на интервале*** $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В более общем виде — ***функция непрерывна на любом интервале вида*** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. При значениях $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции. **Свойство 8.** $E(f)=(-\infty, +\infty)$. Замечание. Свойства 4—8, прочитанные по графику, можно доказать, опираясь на соответствующие математические утверждения, которые нам с вами пока не известны (поэтому мы и ограничиваемся наглядно-интуитивными представлениями). Впрочем, доказательство одного из свойств мы можем осуществить и сейчас. Докажем, что функция $y=\text{tg } x$ возрастает на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Возьмем два значения аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка: $x_1 < x_2$. Тогда в силу возрастания функции $y=\sin x$ на выбранном полуинтервале, будем иметь $\sin x_1 < \sin x_2$. В силу убывания функции $y=\cos x$ на выбранном полуинтервале будем иметь $\cos x_1 > \cos x_2$. Значит, $$\text{tg } x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \text{tg } x_2.$$ Итак, из $x_1 < x_2$ следует $\text{tg } x_1 < \text{tg } x_2$, а это и означает возрастание функции $y=\text{tg } x$ на выбранном промежутке. **Пример 1.** Решить уравнение $\text{tg } x=\sqrt{3}$. Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y=\text{tg } x$ — тангенсоиду и $y=\sqrt{3}$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 64), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответст-	

Мурмилова Екатерина Сергеевна

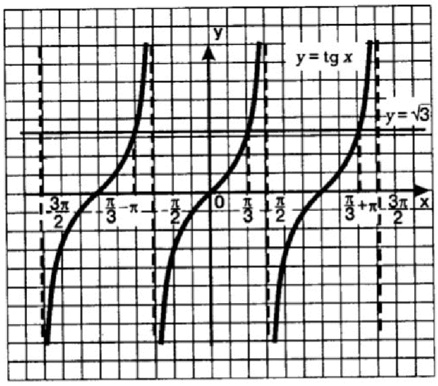


Рис. 64

вующей точки равна $\frac{\pi}{3}$ (мы воспользовались известным числовым равенством $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$), это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Пример 2. Построить график функции $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Для начала разберемся с главной ветвью тангенсоиды.

1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (прямая $x = -\frac{\pi}{2}$ проведена на рис. 65 пунктиром).

2) «Привяжем» функцию $y = \operatorname{tg} x$ к новой системе координат — это будет график функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, а точнее, главная ветвь искомого графика (рис. 65 — сплошная кривая).

3) Чтобы получить график функции $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, достаточно построенную ветвь отобразить симметрично относительно оси x (рис. 66).

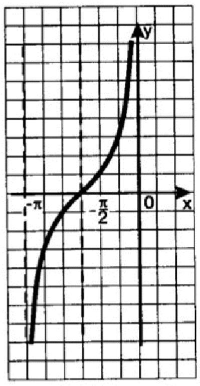


Рис. 65

4) Зная одну ветвь, можно построить весь график (рис. 67).

Мурмилова Екатерина Сергеевна

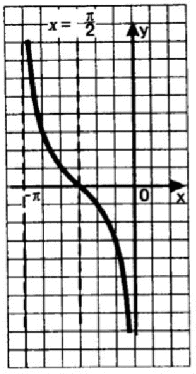


Рис. 66

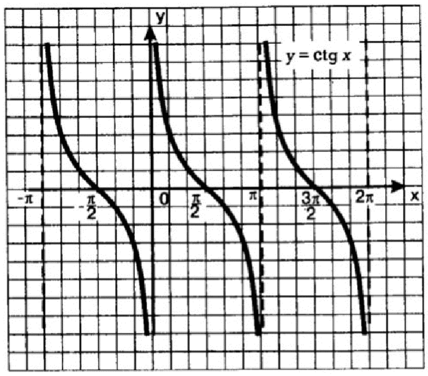


Рис. 67

На самом деле, на рис. 67 построен график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Почему? Потому, что имеет место тождество (формула приведения)

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

График функции $y = \operatorname{ctg} x$, как и график функции $y = \operatorname{tg} x$, называют *тангенсоидой*. *Главной ветвью* графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ обычно называют ветвь, заключенную в полосе от $x = 0$ до $x = \pi$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -1$.

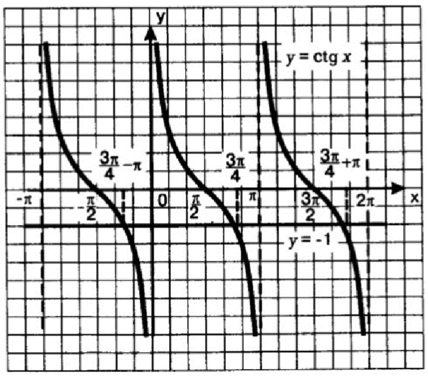


Рис. 68

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ — тангенсоиду и $y = -1$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 68), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πn. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{3\pi}{4}$ (мы воспользовались известным соотношением: $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$), а все решения заданного уравнения можно охватить формулой $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$.

		Максимальное количество баллов за урок: 7

PM

Урок 21		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

<table>
<tr>
<td>Обеспечить формирование умений по теме «Функции y = tg x, y = ctg x, их свойства и графики».
Организовать учебное сотрудничество детей, совместно-распределенную деятельность при решении учебных задач.
Развивать вычислительные навыки, память, внимание.
Содействовать воспитанию активности, мобильности.
Закрепить изучаемый материал в ходе решения задач.
Вырабатывать навыки схематически изображать графики этих функций, находить область определения и область значений, промежутки возрастания и убывания, знакопостоянства, нули функции, вырабатывать умения графически решать уравнения, вычислять значения функций, выполнять преобразования графиков.</td>
<td>

1. Разобрать решение примеров 1 и 3 из учебника.
2. Устно выполнить № 254, 257, 258.

№ 254

$y = \text{tg}\, x$.

а) $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; б) $\text{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$; в) $\text{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$; г) $\text{tg}\, \pi = 0$.

№ 257

$y = \text{ctg}x$.

а) $\text{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$; б) $\text{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) ctg2π – не сущ.; г) $\text{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$.

№ 258

$y = \text{ctg}\, x$.

а) $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$; $y_{max} = 1$; $y_{min} = 0$.

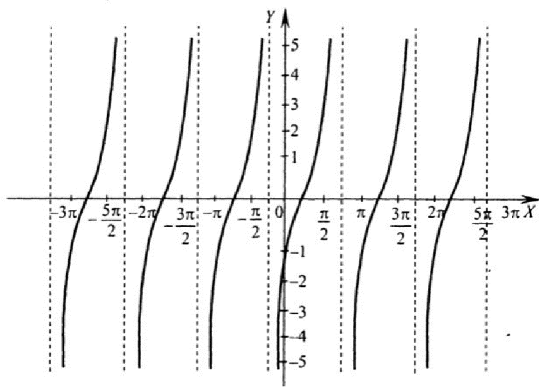
б) $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi)$; $y_{max} = 0$; y_{min} – не сущ.;

в) $x \in (-\pi; 0)$; y_{max}, – не сущ.; y_{min} – не сущ.;

г) $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; $y_{max} = \sqrt{3}$; $y_{min} = -1$.

3. Выполнить ***№ 261 (в)***.

$y = \text{tg}(x - \frac{\pi}{4})$.



</td>
<td>Учащиеся выполняют упражнения, объединившись в группы по 4 человека.</td>
</tr>
</table>

МС

Урок 21		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Систематизировать полученные знания. Подготовка к контрольной работе.	**Мы пополнили наш словарный запас математического языка следующими *терминами*:** **числовая окружность;** **косинус, синус, тангенс и котангенс числового аргумента;** **радиан, радианная мера угла;** **тригонометрические функции;** **синусоида, тангенсоида;** **периодическая функция, период функции, основной период;** **формулы приведения.** **Мы получили *соотношения* между градусной и радианной мерами угла:** $1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{р́Љ};\quad 1\,\text{р́Љ} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ.$ **Мы исследовали *свойства функций* и научились строить *графики функций*:** $y = \sin x,\quad y = \cos x,$ $y = \operatorname{tg} x,\quad y = \operatorname{ctg} x.$ **Мы получили ряд *формул*:** $\sin(-x) = -\sin x;\quad \cos(-x) = \cos x;$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;\quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x;$ $\sin(x+2\pi) = \sin x;\quad \cos(x+2\pi) = \cos x;$ $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x;\quad \operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x;$ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};\quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$ $1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};\quad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$ **Мы сформулировали правило для запоминания *формул приведения*.** **Мы пополнили список свойств функции, которые обычно включают в процедуру чтения графика, *новым свойством* — периодичностью функции и выявили геометрическую особенность графика периодической функции.** **Мы научились строить *графики*:** **функций $y = mf(x), y = f(kx)$ (в частности, $y = -f(x), y = f(-x)$) по известному графику функции $y = f(x)$;** **гармонических колебаний.** **Поуровневая самостоятельная работа по теме: «Функции y = tgx и y = ctgx» в четырех вариантах.** Iв 1. Найдите значение функции y = f(x) при заданном значении аргумента x: x = $\frac{\pi}{3}$ 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции y = ctgx на промежутке: на полуинтервале	Учащиеся проговаривают вместе с учителем основные моменты темы. Учащиеся решают самостоятельную работу.

$\left[-\frac{\pi}{2};0\right)$

3. Решите графически уравнение:

а) tgx = $\sqrt{3}$

б) ctgx = – 1

4. Исследуйте функцию на четность, если:

f(x) = 2tg2x – x3

5. Постройте график функции:

а) y = tg(x – $\frac{\pi}{6}$) + 2

б) y = 3tgx×ctgx

IIв

1. Найдите значение функции y = f(x) при заданном значении аргумента x: x = $\frac{\pi}{6}$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции y = ctgx на промежутке: на полуинтервале (0; x)

3. Решите графически уравнение:

а) tgx = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

б) ctgx = $\sqrt{3}$

4. Исследуйте функцию на четность, если:

f(x) = 3tgx – x2

5. Постройте график функции:

а) y = tg(x + $\frac{\pi}{2}$) – 1

б) y = 4tgx×ctgx

IIIв

1. Найдите значение функции y = f(x) при заданном значении аргумента x: x = $\frac{\pi}{4}$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции y = ctgx на промежутке: на полуинтервале $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

3. Решите графически уравнение:

а) tgx = 0

б) ctgx = – $\sqrt{3}$

4. Исследуйте функцию на четность, если:

f(x) = $\frac{2ctgx}{x^2}$

5. Постройте график функции:

а) y = tg(x + $\frac{\pi}{4}$) + 1

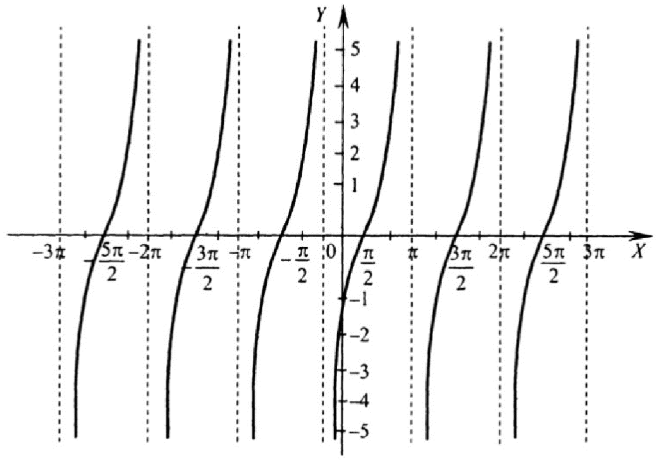
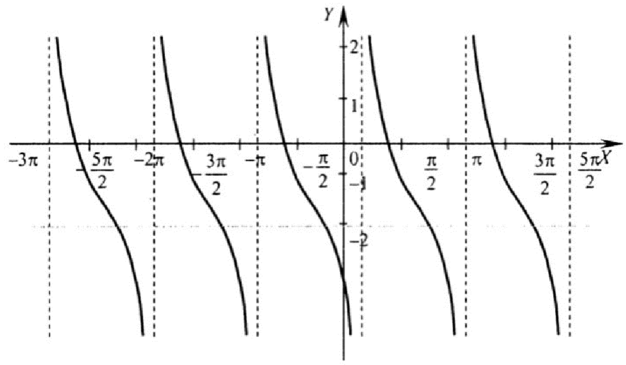
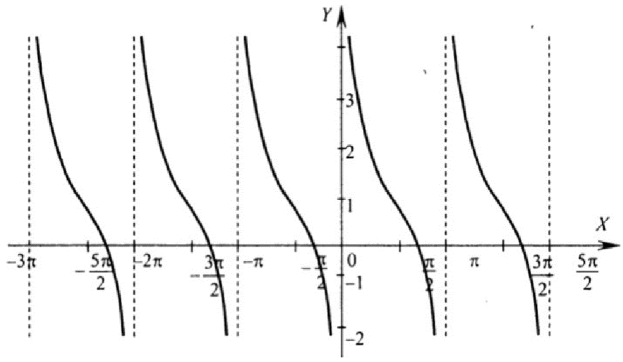
	б) y = 2sin2(tgx) + 2cos2(tgx) IVв 1. Найдите значение функции y = f(x) при заданном значении аргумента x: x = $\frac{\pi}{3}$ 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции y = ctgx на промежутке: на полуинтервале $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ 3. Решите графически уравнение: а) tgx = – 1 б) ctgx = 0 4. Исследуйте функцию на четность, если: f(x) = x5ctgx 5. Постройте график функции: а) y = tg(x – $\frac{\pi}{3}$) + 2 б) y = 3sin2(ctgx) + 3cos2(ctgx)	

МКЗ

Урок 21		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**
Устранить пробелы в знаниях учащихся.	На основе анализа работы учащихся на уроках, их домашних и самостоятельных работ, учитель разбирает задания, которые не усвоены учащимися, при необходимости повторяет некоторые теоретические вопросы.	Учащиеся вместе с учителем разбирают непонятные им задания.

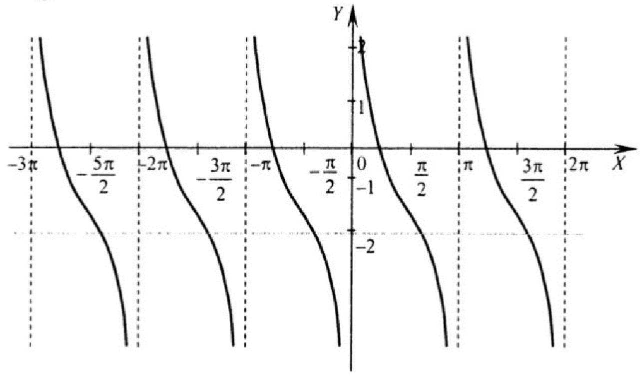
МК

Урок 21		
Дидактические цели	**Деятельность учителя. Учебный материал с указанием заданий**	**Деятельность учащихся. Рекомендации по выполнению заданий, оценка**

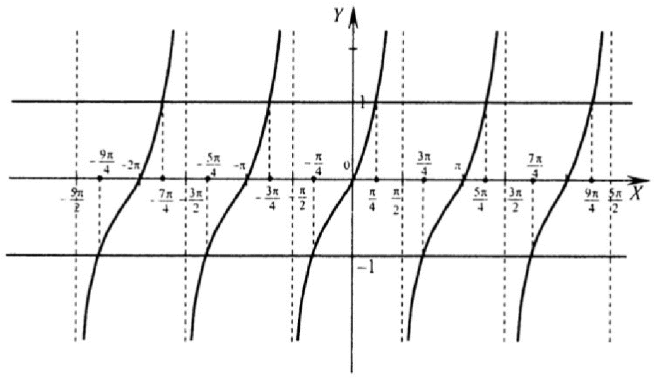
Осуществить контроль усвоения материала учащимися. Учить детей осуществлять контроль и самооценку своей деятельности;	**IV. Самостоятельная работа** I уровень № 262 (в), 264 (б). II уровень № 263 (г), 264 (г). ***Ответы и решения:*** ***№ 262 (в)*** $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$  ***№ 263 (г)*** $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2.$  ***№ 264 (б)*** $y = \operatorname{ctg} x + 1.$ 	Учащиеся самостоятельно выполняют упражнения из учебника. Один правильный ответ: 4 балла.

№ 264 (г)

$y = \text{ctg}x - 2.$



№ 256 (б, в, г)



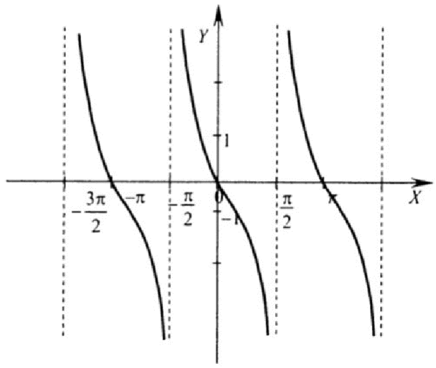
б) $\text{tg}x = 1;$ $\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $k \in Z;$

в) $\text{tg}x = -1;$ $-\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $k \in Z;$

г) $\text{tg}x = 0;$ $\pi k;$ $k \in Z.$

3) По графику рис. 67 с. 69 учебника решить уравнение $\text{ctg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

	№ 259 (в) $-\frac{\pi}{3}+\pi k; \qquad k \in Z.$ ***№ 246 (а)*** Докажите, что π – период. $y = \text{tg}x + \sin 2x - \text{tg}3x - \cos 4x.$ $y(x+\pi) = \text{tg}(x+\pi) + \sin(2x+2\pi) - \text{tg}(3x+3\pi) - \cos(4x+4\pi) = y(x),$ $T = \pi$. ***№ 269*** Определите знак разности: а) $\text{tg}200° - \text{tg}201° < 0;$ б) $\text{tg}1 - \text{tg}1{,}01 < 0;$ в) $\text{tg}2{,}2 - \text{tg}2{,}1 > 0;$ г) $\text{tg}\frac{3\pi}{5} - \text{tg}\frac{6\pi}{5} < 0.$ ***№ 270*** Исследуйте на четность функцию а) $f(x) = \text{tg}(x)\sin^2 x;\ \ f(-x) = -\text{tg}(x)\sin^2 x = -f(x)$ – нечетная. (*Ответ*: нечетная.) б) $f(x) = \frac{\text{tg}^2 x}{x^2-1};\ \ f(-x) = \frac{\text{tg}^2 x}{x^2-1} = f(x)$ – четная. (*Ответ*: четная.) в) $f(x) = x^5\text{tg}x;$ $f(-x) = (-x)^5\text{tg}(-x) = -x^5(-\text{tg}x) = x^5\text{tg}x = f(x)$ (*Ответ*: четная.) г) $f(x) = x^2 + \sin x + \text{tg}x,\ \ f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x) + \text{tg}(-x) =$ $= x^2 - \sin x - \text{tg}x.$ (*Ответ*: ни четная, ни нечетная.) ***№ 273*** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2+1$. Докажите, что $f(\text{tg}x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$ *Решение:* Найдем $f(\text{tg}x) = (\text{tg}x)^2 + 1 = \text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, что и требовалось доказать. **Домашнее задание:** § 15, № 263 (а), 265, 271, 272.	Учащиеся записывают домашнее задание.

	Ответы и решения: ***№ 263 (а)*** $y = -\mathrm{tg}x$;  ***№ 265*** а) $y = \mathrm{tg}2x$; $\mathrm{T} = \frac{\pi}{2}$; $y(x+\mathrm{T}) = \mathrm{tg}(2x+\pi) = \mathrm{tg}2x$ б) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{3}$; $\mathrm{T} = 3\pi$; $y(x+\mathrm{T}) = \mathrm{tg}(\frac{x}{3}+\pi) = \mathrm{tg}\frac{x}{3}$ в) $y = \mathrm{tg}5x$; $\mathrm{T} = \frac{\pi}{5}$; $y(x+\mathrm{T}) = \mathrm{tg}(5x+\pi) = \mathrm{tg}5x$ г) $y = \mathrm{tg}\frac{2x}{5}$; $\mathrm{T} = \frac{5\pi}{2}$; $y(x+\mathrm{T}) = \mathrm{tg}(\frac{2x}{5}+\pi) = \mathrm{tg}\frac{2x}{5}$ ***№ 271*** а) $f(x) = \sin x - \mathrm{ctg}x$; $f(-x) = -\sin x - \mathrm{ctg}x = -f(x)$; (*Ответ*: нечетная.) б) четная; в) нечетная; г) нечетная. ***№ 272*** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \mathrm{tg}x$. Докажите, что $f(2x+2\pi) + f(7\pi - 2x) = 0$. *Доказательство:* $f(2x+2\pi) + f(7\pi-2x) = \mathrm{tg}(2x+2\pi) + \mathrm{tg}(7\pi-2x) = \mathrm{tg}2x - \mathrm{tg}2x = 0$, что и требовалось доказать.	
		Максимальное количество баллов за урок: <u>8</u>

<u>Урок 22</u>

<u>Контрольная работа.</u>

Правильный ответ: <u>4 балла (Всего - 28).</u>

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

(Свойства и графики тригонометрических функций)

Вариант 1

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

2. Упростите выражения:

а) $\cos^2(\pi + t) + \cos^2(\pi - t)$;

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\operatorname{tg}(-t)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}$.

3. Решите уравнение

$$\cos(2\pi - t) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = 1.$$

4. Постройте график функции

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2.$$

---

5. Постройте график функции

$$y = -2\sin 3x.$$

---

6. Известно, что $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Докажите, что

$$f(\sin x) = 3\sin x - 2\cos^2 x.$$

Мурмилова Екатерина Сергеевна

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

(Свойства и графики тригонометрических функций)

Вариант 2

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

2. Упростите выражения:

а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + \sin^2(\pi - t)$;

б) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\operatorname{ctg}(-t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}$.

3. Решите уравнение

$$\sin(2\pi - t) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + 1 = 0.$$

4. Постройте график функции

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$$

5. Постройте график функции

$$y = 2\cos\frac{x}{2}.$$

6. Известно, что $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$. Докажите, что

$$f(\cos x) = 2\cos x - 3\sin^2 x.$$

Мурмилова Екатерина Сергеевна

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

(Свойства и графики тригонометрических функций)

Вариант 3

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

2. Упростите выражения:

а) $\sin^2(\pi + t) - \sin^2(\pi - t)$;

б) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{\sin(\pi - t)\operatorname{tg}(-t)}$.

3. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi + t) + 1 = 0.$$

4. Постройте график функции

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1.$$

---

5. Постройте график функции

$$y = -2\cos 3x.$$

---

6. Известно, что $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Докажите, что

$$f(\sin x) = 2\sin x - 3\cos^2 x + 2.$$

Мурмилова Екатерина Сергеевна

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

(Свойства и графики тригонометрических функций)

Вариант 4

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

2. Упростите выражения:

а) $\cos^2(2\pi - t) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\operatorname{ctg}(-t)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$.

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \sin(\pi - t) = 1.$$

4. Постройте график функции

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2.$$

---

5. Постройте график функции

$$y = 2\sin\frac{x}{2}.$$

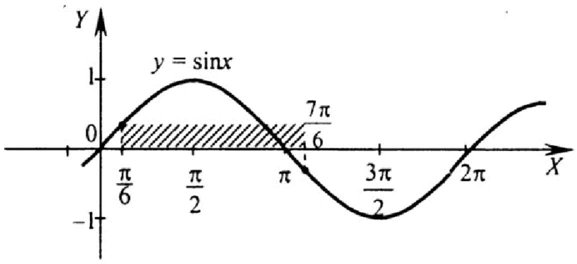
---

6. Известно, что $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$. Докажите, что

$$f(\cos x) = 3\cos x - 2\sin^2 x + 1.$$

Мурмилова Екатерина Сергеевна

1. *Решение:*



На отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ для функции $y = \sin x$ $\;y_{\text{наим.}} = y(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$;

$y_{\text{наиб.}} = y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(*Ответ*: $-\frac{1}{2}$; 1.)

2 а) *Решение:*

$\cos^2(\pi + t) + \cos^2(\pi + t) = \cos^2 t + \cos^2 t = 2\cos^2 t$.

(*Ответ*: $2\cos^2 t$.)

2 б) *Решение:*

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - t)\text{tg}(-t)}{\cos(\frac{\pi}{2} + t)} = \frac{-\cos t \cdot \text{tg}t}{-\sin t} = \text{ctg}t \cdot \text{tg}t = 1.$$

(*Ответ*: 1.)

3. *Решение:*

$\cos(2\pi - t) - \sin(\frac{3\pi}{2} + t) = 1$;

$\cos t + \cos t = 1.$

$\cos t = \frac{1}{2}$

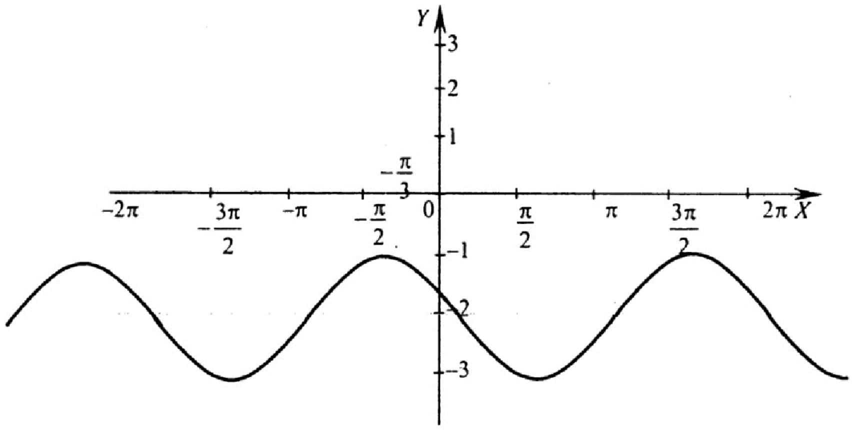
$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \qquad t = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

(*Ответ*: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$)

4. *Решение:*

График функции $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 2$ можно получить из графика $y = \cos x$, выполнив следующие преобразования:

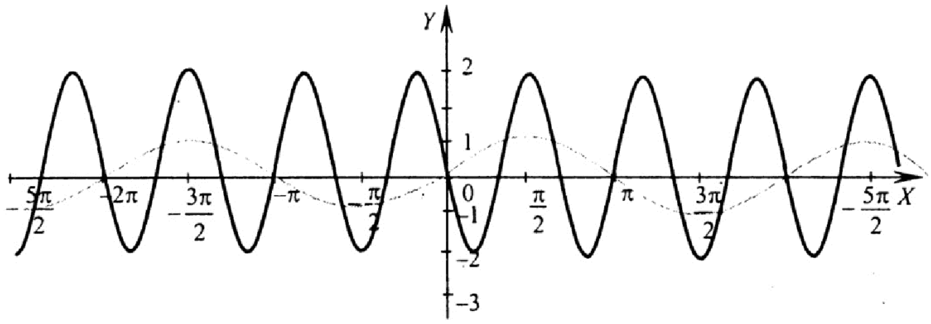
1) сдвинуть вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{3}$ влево;
2) сдвинуть вдоль оси ординат на 2 единичных отрезка вниз.



5. *Решение:*

График функции $y = -2\sin 3x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, выполнив следующие преобразования:

1) сжать к оси ординат с коэффициентом 3;
2) растянуть от оси абсцисс с коэффициентом 2;
3) отобразить симметрично относительно оси x.



Докажите, что $f(\sin x) = 3\sin x - 2\cos^2 x.$

Решение:

1. Найдем $f(\sin x)$.

$f(\sin x) = 2(\sin x)^2 + 3(\sin x) - 2 = 2\sin^2 x + 3\sin x - 2\cos^2 x =$

$= 3\sin x - 2\cos^2 x$, что и требовалось доказать.

Урок 23

Защита проектов учеников.

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ИГРА « УМНИКИ И УМНИЦЫ»

Заключительный урок по теме «Тригонометрические функции». Правильный ответ: 2 балла.

Вопросы для всех учащихся.

1. Функция y=cosx убывает на промежутке......
2. Периодом функции y=sinx является число...
3. Функция y=tgx возрастает на промежутке....
4. Наименьшее значение функции y=ctgx на промежутке [П/3; 2П/3] равно...
5. Четной или нечетной является функция? y=xcosx, y=x2tgx, y=sinx/x, y=x+cosx
6. Сколько решений имеет уравнение sin x = 0,5 на промежутке [0; 7П]
7. График функции y= cos2x получается из графика y=cosx...
8. Наименьший положительный период функции y=cosπx равен ...
9. Справедливы ли равенства tg =1/ctgx, ctgxtgx=1 sin2x – cos2x = 1
10. Синус и косинус одного аргумента могут быть равными:0и0? $\sqrt{2}$/2? 2 и -$\sqrt{2}$/2? 0,3 и 0,7?
11. Тангенс и котангенс одного аргумента могут быть равными: 3 и $\sqrt{3}$/3? -1 и 1? 1-$\sqrt{2}$ и 1+$\sqrt{2}$?
12. Какая из этих функций четная, а какая нечетная? Y=xsinx; Y=x2cosx
13. Уравнение cos x = 0,5 на промежутке [0; 5П} имеет .... Решений
14. График функции y=sin 0,5 x получается из графика функции y=sinx …
15. Назовите период функции y=sinx/3; y=sin3x
16. Пересекается ли с осью абсцисс график функции y=1/cosx; y=$\sqrt{2\sin x}$
17. Назовите амплитуду, круговую частоту, период гармонического колебания y=24sin(5t+П/3)
18. Назовите область определения фунции y=|sinx|, назовите область значения этой функции.
19. Какие графики функций симметричны относительно оси ординат, а какие относительно начало отсчета? Y=sinx+x3, y=x+ctgx, y=x+cosx, y=sinx+tg2x, Y=x2xsinx
20. Оцените значение выражения 3sin2x 2-3sin2x
21. Какие тригонометрические функции являются четными?
22. Как доказать, что функция является периодической с периодом П y=cos2x
23. Как называются графики тригонометрических функций y=sinx, y=cosx, y=tgx ?
24. Кто является основоположником понятия "функция"?
25. Ученые какой страны уделили самое большое время изучению функции в 18 веке?
26. Все ли тригонометрические функции имеют область определения: x-любое ?
27. Какие изменения претерпевают графики?Y=f(-x), y=f(kx), y=-f(x), y=kf(x), y= f(x)+m, Y=f(x+n), y=|f(x)|
28. 28. Перечислите свойства тригонометрических функций.

Вопросы для учащихся на цветных дорожках (красной, желтой, зеленой)

1. Какие тригонометрические функции относятся к четным?

2. Можно ли найти все тригонометрические функции угла, зная значение одной из них?
3. Назовите промежутки возрастания и убывания функции y = sin x.
4. Сформулируйте правило построения графика функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$
5. Будет ли функция Af(kx + T) периодической, если известно, что функция f(x) периодическая?
6. Докажите, что функция f(x) = 3x2 + x4 является четной.
7. Является ли функция f(x) = x5cos3x + x4 четной или нечетной?
8. Перечислите основные тригонометрические тождества.
9. Назовите наибольшее и наименьшее значения тригонометрических функций.
10. В каких четвертях тригонометрического круга tgx и ctgx имеют положительные знаки?
11. Дайте определение минимума функции.
12. Являются ли графики тригонометрических функций симметричными?
13. Как можно определить, симметрична ли функция?
14. Чему равен наименьший положительный период функции y = sin x и y = cos x?
15. Можно ли поведение периодических функций рассматривать только на отрезке, равном наименьшему периоду?
16. Чем отличаются графики функций y = sinx и y = sinx + 2?
17. В какую фигуру переходит график функции при растяжении с коэффициентом k вдоль оси ординат?
18. Какими формулами задается растяжение вдоль оси Ox с коэффициентом k?

Всего: 50 баллов.

Всего баллов за курс тригонометрии: 660.